Trong các kỳ thi tuyển sinh vào các trường đại học- cao đẳng thường có bài toán về tính tích phân. Bài viết này giới thiệu một số bài toán về tích phân đổi biến số và tích phân liên kết nhằm giúp các em có cách nhìn mới trong một số bài toán tích phân

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC VÀ MỘT SỐ VÍ DỤ

I. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ DẠNG 1:

Tính I = $\int_a^b f[u(x)].u'(x)dx$ bằng cách đặt t = u(x)

Công thức đổi biến số dạng 1:

$$\boxed{\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt \; (1)}$$

Cách thực hiện:

Bước 1: Đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x)dx$

Bước 2: Đổi cận : $\left|\begin{array}{l} x = b \\ x = a \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} t = u(b) \\ t = u(a) \end{array}\right.$

Bước 3: Chuyển tích phân đã cho sang tích phân theo biến t ta được

$I = \int_a^b f[u(x)]u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt$ (tiếp tục tính tích phân mới)

CHÚ Ý: +, Khi gặp dạng f(x) có chứa ($\frac{1}{x}, \ln x$) thì đặt t = lnx.

+, Khi f(x) có chứa $\sqrt[n]{u(x)}$ thì thường đặt t = u(x).

+, Khi f(x) có mẫu số thì thường đặt t = mẫu.

Ví dụ 1. Tính tích phân I = $\int_1^e \frac{\ln x}{x(2+\ln x)^2}dx$ (ĐH Khối B 2010)

Giải

$I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(2+\ln x)^2}dx$; $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$

x	1	e
u	0	1

$$I = \int_0^1 \frac{u}{(2+u)^2}du = \int_0^1 \left(\frac{1}{2+u} - \frac{2}{(2+u)^2}\right)du = \left(\ln|2+u| + \frac{2}{2+u}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \left(\ln 3 + \frac{2}{3}\right) - (\ln 2 + 1) = \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{3}$$

Ví dụ 2: Tính tích phân $I = \int_{\sqrt{7}}^{4} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$ (ĐH An Ninh 1999)

Lời giải: Đặt $t = \sqrt{x^2+9} \Rightarrow x^2 = t^2 - 9 \Rightarrow \begin{cases} xdx = tdt \\ x = \sqrt{7} : t = 4 \\ x = 4 : t = 5 \end{cases}$

$$I = \int_{\sqrt{7}}^{4} \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2+9}} = \int_{4}^{5} \frac{tdt}{t(t^2-9)} = \int_{4}^{5} \frac{dt}{t^2-9} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right|\Bigg|_4^5 = \frac{1}{6}\ln\frac{7}{4}$$

Như vậy ta đã thêm vào cả tử và mẫu với x để tính tích phân đơn giản hơn.

Tương tự ta tính được $I = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$. (ĐH Khối A 2003)

Ví dụ 3: Tính tích phân $I = \int_{0}^{\sqrt{7}} \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$

Lời giải: Đặt $t = \sqrt[3]{x^2+1} \Rightarrow x^2 = t^3 - 1 \Rightarrow \begin{cases} xdx = \frac{3}{2}t^2dt \\ x = 0 : t = 1 \\ x = \sqrt{7} : t = 2 \end{cases}$

$$I = \int_{0}^{\sqrt{7}} \frac{x^2.xdx}{\sqrt[3]{x^2+1}} = \frac{3}{2}\int_{1}^{2} \frac{(t^3-1).t^2dt}{t} = \frac{3}{2}\int_{1}^{2}(t^4-t)dt = \frac{3}{2}\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{93}{10}$$

Như vậy ở đây ta đã tách tử số $x^3=x^2.x$ làm xuất hiện xdx

Ví dụ 4: Tính tích phân $I = \int_{1}^{e} \frac{\sqrt{1+3\ln x}\,\ln x}{x}dx$. (ĐH Khối B 2004)

Lời giải: Đặt $t = \sqrt{1+3\ln x} \Rightarrow \ln x = \frac{t^2-1}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{x} = \frac{2tdt}{3} \\ x = 1 : t = 1 \\ x = e : t = 2 \end{cases}$

$$I = \int_{1}^{2} t.\frac{t^2-1}{3}.\frac{2t}{3}dt = \frac{2}{9}\int_{1}^{2}(t^4-t^2)dt = \frac{2}{9}\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{116}{135}$$

Nhận xét: bài toán trên còn có thể giải bằng cách đặt t=lnx, các bạn có thể giải và so sánh với lời giải trên.

Ví dụ 5: Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{xdx}{1+\sqrt{x-1}}$ (ĐH Khối A 2004)

Lời giải: Đặt $t = \sqrt{x-1} \Rightarrow x = t^2 + 1 \Rightarrow \begin{cases} dx = 2tdt \\ x = 1 : t = 0 \\ x = 2 : t = 1 \end{cases}$

$$I = 2\int_0^1 \frac{t(t^2+1)}{1+t}dt = 2\int_0^1 \left(t^2 - t + 2 - \frac{2}{t+1}\right)dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t - 2\ln|t+1|\right)\Big|_0^1 = \frac{11}{3} - 4\ln 2$$

Tổng quát:
$\int_a^b \frac{p(x)}{\sqrt{ax+b}+c}dx$ với *p(x)* là một đa thức chứa x ta đặt $t = \sqrt{ax+b}+c$ hoặc $t = \sqrt{ax+b}$

Ví dụ 6: Tính tích phân $\mathrm{I} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx$ (Đề thi ĐH khối A – 2005)

Lời giải: Đặt $t = \sqrt{1+3\cos x} \Rightarrow \cos x = \frac{t^2-1}{3} \Rightarrow \begin{cases} -\sin x dx = \frac{2tdt}{3} \\ x = 0 : t = 2 \\ x = \frac{\pi}{2} : t = 1 \end{cases}$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x(2\cos x + 1)}{\sqrt{1+3\cos x}}dx = \frac{2}{3}\int_1^2 \frac{t(2.\frac{t^2-1}{3}+1)}{t}dt = \frac{2}{9}\int_1^2 (2t^2+1)dt = \frac{2}{9}.\left(\frac{2t^3}{3} + t\right)\Big|_1^2 = \frac{34}{27}$$

Tổng quát :
$\int_\alpha^\beta \frac{a.\sin 2x + b\sin x}{\sqrt{c+d\cos x}}dx$ hoặc $\int_\alpha^\beta \frac{a.\sin 2x + bcosx}{\sqrt{c+d\,sinx}}dx$ ta đặt $\sqrt{c+d\cos x}$ =t
(hoặc $\sqrt{c+d\sin x}$ =t)

II. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ DẠNG 2:

Tính $\mathrm{I} = \int_a^b f(x)dx$ bằng cách đặt $x = \varphi(t)$

Công thức đổi biến số dạng 2:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Cách thực hiện:

Bước 1: Đặt $x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)dt$

Bước 2: Đổi cận : $\begin{vmatrix} x = b \\ x = a \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} t = \beta \\ t = \alpha \end{vmatrix}$

Bước 3: Chuyển tích phân đã cho sang tích phân theo biến t ta được

$I = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ (tiếp tục tính tích phân mới)

CHÚ Ý:

Khi gặp các dạng sau :

$\sqrt{a^2+x^2}$ Đặt x = a.tgu (hoặc a.cotgu) với u $\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ (hoặc u $\in(0;\pi)$).

$\sqrt{a^2-x^2}$ Đặt x = a.sinu(hoặc a.cosu) với u $\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ (hoặc u $\in[0;\pi]$.

$\sqrt{x^2-a^2}$ Đặt x = $\frac{a}{cosu}$ (hoặc x = $\frac{a}{sinu}$) với u $\in[0;\pi]$ - $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ (hoặc u $\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ - $\{0\}$)

Ví dụ 1. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Giải

$$\text{Đặt } x=\sin t,\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=\cos t dt$$

$$x=0\Rightarrow t=0,\ x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}dt=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos t}{|\cos t|}dt=\int_0^{\frac{\pi}{6}}dt=t|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}-0=\frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Vậy } I=\frac{\pi}{6}.$$

Ví dụ 2. Tính tích phân $I=\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx$.

Hướng dẫn:

Đặt $x=2\sin t$

ĐS: $I=\pi$.

Ví dụ 3. Tính tích phân $I=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$.

Giải

$$\text{Đặt } x=\tan t,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow dx=(\tan^2 x+1)dt$$

$$x=0\Rightarrow t=0,\ x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2 t+1}{1+\tan^2 t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt=\frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Vậy } I=\frac{\pi}{4}.$$

Ví dụ 4. Tính tích phân $I=\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{dx}{x^2+2x+2}$.

Hướng dẫn:

$$I=\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{dx}{1+(x+1)^2}.$$

Đặt $x+1=\tan t$

ĐS: $I=\frac{\pi}{12}$.

Ví dụ 5. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

Giải

Đặt $x = tgt \Rightarrow dx = (1 + tg^2t)dt$

$$x = 0 \Rightarrow t = 0,\ x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1+tgt)}{1+tg^2t}(1+tg^2t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+tgt)dt.$$

Đặt $t = \frac{\pi}{4} - u \Rightarrow dt = -du$

$$t = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{4},\ t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = 0$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+tgt)dt = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln\left[1 + tg\left(\frac{\pi}{4} - u\right)\right]du$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \frac{1-tgu}{1+tgu}\right)du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+tgu}\right)du$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2du - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+tgu)\,du = \frac{\pi}{4}\ln 2 - I.$$

Vậy $I = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

B.MỘT SỐ BÀI TOÁN TÍCH PHÂN LIÊN KẾT

Ví dụ 1:

a) CMR nếu f(x) lẻ và liên tục trên [-a;a] (a>0) thì : I= $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

b) CMR nếu f(x) chẵn và liên tục trên [-a;a] (a>0) thì : J= $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

Giải:

Lời giải: Đặt x=-t $\Rightarrow \begin{cases} dx = -dt \\ x = -a : t = a \\ x = a : t = -a \end{cases}$

$\Rightarrow I = \int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{-a} f(-t)dt = \int_{-a}^{a} f(-t)dt$. Do f(x) là hàm lẻ nên f(-x)=-f(x) do đó

$$\Rightarrow I = \int_{-a}^{a} f(-t)dt = -\int_{-a}^{a} f(t)dt = -\int_{-a}^{a} f(x)dx = -I \Rightarrow 2I = 0 \Rightarrow I = 0$$

Áp dụng:

Tính tích phân : $I = \int_{-1/2}^{1/2} \cos x.\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx.$

giải:

$$I=\int_{-1/2}^{0}\cos x.\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx+\int_{0}^{1/2}\cos x.\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx. \qquad (1)$$

Xét tích phân $J=\int_{-1/2}^{0}\cos x.\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx$

đặt: $x=-t\Rightarrow dx=-dt$

đổi cận: $\begin{cases} x=-\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ t=\frac{1}{2}\\ x=0\Rightarrow t=0\end{cases}$

khi đó:

$$I=-\int_{1/2}^{0}\cos(-t).\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)dt=-\int_{0}^{1/2}\cos t.\ln\left(\frac{1-t}{1+t}\right)dt=-\int_{0}^{1/2}\cos x.\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx \qquad (2)$$

Thay (2)vào (1) suy ra I=0.

Câu b) chứng minh tương tự .

Ví dụ 2. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2 x}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}dx$ và $J=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos^2 x}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}dx$.

Giải

Ta có: $$I-3J=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2 x-3\cos^2 x}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\sin x-\sqrt{3}\cos x)dx$$

$$=(-\cos x-\sqrt{3}\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=1-\sqrt{3}\ (1).$$

Mặt khác: $$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}$$

Đặt $t=x+\frac{\pi}{3}\Rightarrow dt=dx$

$x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{3},\ x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow I+J=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sin t}=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin tdt}{\sin^2 t}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\cos t)}{\cos^2 t-1}=\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos t-1}-\frac{1}{\cos t+1}\right)d(\cos t)$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\cos t-1}{\cos t+1}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}\ln 3\ (2).$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\begin{cases}I-3J=1-\sqrt{3}\\ I+J=\frac{1}{4}\ln 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}I=\frac{3}{16}\ln 3+\frac{1-\sqrt{3}}{4}\\ J=\frac{1}{16}\ln 3-\frac{1-\sqrt{3}}{4}\end{cases}.$

Vậy $I=\frac{3}{16}\ln 3+\frac{1-\sqrt{3}}{4},\ J=\frac{1}{16}\ln 3-\frac{1-\sqrt{3}}{4}.$

Ví dụ 3. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2009} x}{\sin^{2009} x + \cos^{2009} x} dx$.

Giải

Đặt $x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$

$x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2},\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$

$$\Rightarrow I = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin^{2009}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\sin^{2009}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \cos^{2009}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2009} t}{\sin^{2009} t + \cos^{2009} t} dx = J \ (1).$$

Mặt khác $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $I = \frac{\pi}{4}$.

Tổng quát:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx = \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}^+.$$

Ví dụ 4: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx$

Lời giải: Đặt $x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow \begin{cases} dx = -dt \\ x = 0 : t = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} : t = 0 \end{cases}$

$$I = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 t}{\sin t + \cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x + \cos x} dx = J$$

$$\Rightarrow I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin x.\cos x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \frac{1}{2}\sin 2x) dx = \left(x + \frac{1}{4}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}.$$ Vậy $\begin{cases} I = J \\ I + J = \frac{\pi - 1}{2} \end{cases} \Rightarrow I = \frac{\pi - 1}{4}$

Chú ý: - Bài toán ở ví dụ 4 có thể tổng quát thành các dạng sau:

$$\int_a^b \frac{\sin^k mx}{\sin mx + \cos mx} dx \quad ; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[n]{\sin^m ax}}{\sqrt[n]{\sin^m ax} + \sqrt[n]{\cos^m ax}}$$

- Bằng cách đặt $x = \frac{\pi}{2} - t$ ta được: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$

<u>Ví dụ 5:</u> Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{\cos^2 x - 4} dx$

Thông thường khi gặp tích phân trên, hầu hết các bạn đều nghĩ đến phương pháp tính tích phân từng phần. Song các bạn hãy thử làm như thế và so sánh với lời giải sau:

Lời giải : Đặt $x = \pi - t \Rightarrow \begin{cases} dx = -dt \\ x = 0 : t = \pi \\ x = \pi : t = 0 \end{cases}$

Khi đó $I = -\int_{\pi}^{0} \frac{(\pi - t)\sin(\pi - t)}{\cos^2(\pi - t) - 4} dt = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t)\sin t}{\cos^2 t - 4} dt = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\cos^2 t - 4} dt - \int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{\cos^2 t - 4} dt$

$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x - 4} dx - \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{\cos^2 x - 4} dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x - 4} dx - I$

$\Rightarrow 2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x - 4} dx \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x - 4} dx$

Đặt $cosx = t \Rightarrow \begin{cases} sinxdx = -dt \\ x = 0 : t = 1 \\ x = \pi : t = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow I = -\frac{\pi}{2} \int_1^{-1} \frac{dt}{t^2 - 4} = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} \frac{dt}{(t-2)(t+2)} = \frac{\pi}{8} \ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| \Big|_{-1}^{1} = -\frac{\pi \ln 3}{4}$

Bài tập tương tự: Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} \frac{xdx}{\sin x + 1}$.

ĐS: $I = \pi$.

Tổng quát:
Nếu hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a; b] và thoả mãn **f(x) = f(a +b - x)** thì

$$\int_a^b x.f(x)dx = \frac{a+b}{2}.\int_a^b f(x).dx$$

Hệ quả: $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x)dx$.

Từ đó ta có cách đặt tổng quát khi gặp tích phân $\int_a^b f(x)dx$ mà không thay đổi cận là đặt x=a+b-t.

Ví dụ 6. Tính tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{2011^x + 1}dx$.

Giải

Đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt$

$$x = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4},\ x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow I = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(-t)}{2011^{-t} + 1}dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2011^t \cos t}{1 + 2011^t}dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + 2011^t) - 1}{1 + 2011^t}\cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{1}{2011^t + 1}\right)\cos t dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos t dt - I \Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos t dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos t dt = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Bài tập tương tự: $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{6^x + 1}dx$ (Đề thi đại học năm 2000).

Tổng quát:

Với $a > 0$, $\alpha > 0$, **hàm số** $f(x)$ **chẵn và liên tục trên đoạn** $[-\alpha; \alpha]$ thì

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)}{a^x + 1}dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\alpha} f(x)dx.$$

Cuối cùng là một số bài tập tính tích phân nhờ sử dụng tích phân liên kết:

1. $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x dx}{\sin x + \cos x}$

2. $T = \int_{0}^{\pi} \frac{\cos^4 x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$

3. $M = \int_{0}^{1} \frac{e^x dx}{e^x + e^{-x}}$

4. $G = \int_{1}^{2} \frac{e^x dx}{e^x - e^{-x}}$

5. $R = \int_{0}^{\frac{\pi}{2b}} e^{ax}\cos bx dx \quad (a; b \neq 0)$

6. $U = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos^2 x dx$

7. $A = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x . \cos 2x dx$

8. $E = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos^4 x dx$

9. $P = \int_{1}^{e^{\frac{\pi}{2}}} \sin(\ln x)dx$

10. $W = \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 x}{\cos 2x}dx$