THAO TÁC ĐẶC BIỆT HÓA TRONG VIỆC GIẢI CÁC BÀI TOÁN TỔNG QUÁT.

PHAN VĂN ANH
(GV THPT Số 1 Quảng Trạch , Quảng Bình)

Trong toán học, việc giải các trường hợp đặc biệt nhiều khi định hướng cho chúng ta tìm ra lời giải cho bài toán tổng quát. Xét về mặt logic thao tác đặc biệt hóa thông thường đi đôi với thao tác khái quát hóa.

Trong bài viết này ta xem thao tác đặc biệt hóa như là công cụ để giải bài toán tổng quát.

I. Thao tác đặc biệt hóa trong đại số :

★ Bài toán 1 : SGK ĐS - GT 11NC.

Giải phương trình : $a.\sin x+b.\cos x=c$ (*)

*** Đặc biệt hóa giá trị tham số :**

Cho tham số a , b nhận các giá trị đặc biệt.

Ta tìm lời giải khi cho : $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $c=1$

Ta có : $\frac{1}{2}.\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}.\cos x=1$ (1)

Xem : $\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}$. Ta có :

$$\sin x.\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}.\cos x=1\Leftrightarrow\sin(x+\frac{\pi}{3})=1$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi$$

Lời bình :

- Điểm mấu chốt để giải phương trình (1) là tìm được góc $\varphi=\frac{\pi}{3}$ để xem các hệ số $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ của sinx và cosx là : $\cos\frac{\pi}{3}$ và $\sin\frac{\pi}{3}$. Khi đó chuyển từ dạng (1) về dạng phương trình cơ bản đã học.

- Đến đây đã ***gợi vấn đề*** : Trong trường hợp tổng quát với điều kiện nào của a và b thì có góc φ để xem : $a=\cos\varphi$, $b=\sin\varphi$.

- Dể dàng phát hiện được nếu : $a^2+b^2=1$ thì ta tìm được góc φ để xem : $a=\cos\varphi$, $b=\sin\varphi$.

- Khi đó ta có định hướng cho việc giải bài toán tổng quát là : Biến đổi phương trình (*) về dạng phương trình mà tổng bình phương của các hệ số a và b của sinx và cosx bằng 1.

Bài giải : $a.\sin x+b.\cos x=c$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Xem : $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$

Ta có : $\sin x.\cos\varphi+\sin\varphi.\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\Leftrightarrow\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ Phương trình cơ bản.

Đến đây đã giải quyết xong Bài toán 1. ❐

★ Bài toán 2 : Giải hệ phương trình sau :

$$(I)\begin{cases}x^2+y^2+z^2+2xy-xz-yz=3\\x^2+y^2+yz-xz-2xy=-1\end{cases}$$

*** Đặc biệt hóa vai trò của ẩn số :**

Xem ẩn z là tham số.

Bài giải : $\begin{cases}x^2+y^2+z^2+2xy-xz-yz=3\\x^2+y^2+yz-xz-2xy=-1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow(II)\begin{cases}(x+y)^2-z(x+y)+z^2-3=0\\(x-y)^2-z(x-y)+1=0\end{cases}$$

Đặt : $\begin{cases}u=x+y\\v=x-y\end{cases}\Rightarrow x=\frac{u+v}{2}$; $y=\frac{u-v}{2}$.

Ta có : $(III)\begin{cases}u^2-zu+z^2-3=0 & (1)\\v^2-zv+1=0 & (2)\end{cases}$

Xem (1) là phương trình bậc hai ẩn u và (2) là phương trình bậc hai ẩn v.

Khi đó : $\Delta_1=3(4-z^2)$, $\Delta_2=z^2-4$

Hệ (II) có nghiệm $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta_u\geq0\\\Delta_v\geq0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=2\\z=-2\end{array}\right.$

* Với z = 2 ta có u = v = 1 $\Rightarrow x=1$; $y=0$

* Với z = - 2 ta có u = v = - 1 $\Rightarrow x=-1$; $y=0$

KL : (1 ; 0 ; 2) và (- 1 ; 0 ; - 2).

PHAN ANH

Lời bình :

- Khi giải hệ phương trình mà số ẩn nhiều hơn số phương trình ta thường ***đặc biệt hóa*** vai trò của một ẩn xem nó là tham số.

- Khi biến đổi hệ (I) thành hệ (II) ta thấy vai trò của z khác vai trò của x và y trong hệ nên ta chọn xem z là tham số. ❐

II. Thao tác đặc biệt hóa trong hình học :

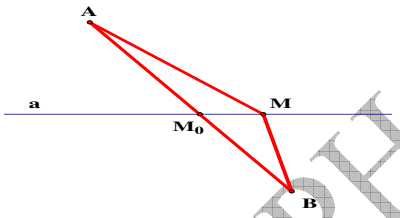
★ Bài toán 3 : SGK HH 11NC.

Hai thôn nằm ở hai vị trí A và B cách nhau một con sông (xem rằng hai bờ sông là hai đường thẳng song song). Người ta dự định xây một chiếc cầu MN bắc qua sông (cố nhiên cầu phải vuông góc với bờ sông) và làm hai đoạn đường thẳng từ A đến M và từ B đến N. Hãy xác định vị trí cây cầu MN sao cho khoảng cách AM + BN ngắn nhất.

*** Đặc biệt hóa khoảng cách giữa a và b :**

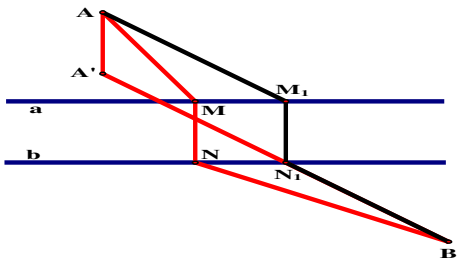
Bài toán sẽ rất đơn giản nếu con sông rất hẹp, hẹp đến mức hai bờ sông a và b xem như trùng với nhau.

Khi đó vị trí cần : $M \equiv N \equiv M_0 = AB \cap a$.



Trường hợp tổng quát có thể đưa về trường hợp trên bằng một phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{MN}$ để a trùng b. Khi đó điểm A biến thành điểm A'sao cho vectơ $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MN}$ và do đó : A'N = AM.

Bài giải :



Gọi A' là điểm sao cho : AA' ⊥a và phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AA'}$ biến đường thẳng a thành đường thẳng b.

Giao điểm của A'B và đường thẳng b là điểm N_1 cần tìm. Khi đó điểm M_1 sao cho :

$\overrightarrow{M_1N_1} = \overrightarrow{AA'}$. Ta xác định vị trí của M , N. ❐

★ Bài toán 4 :

Cho n điểm A_1 , A_2 ,.., A_n phân biệt thuộc đường thẳng a ($n \geq 2$) và một điểm $M \notin a$. Nối M với các điểm A_1 , A_2 ,., A_n. Hỏi có thể tạo được bao nhiêu tam giác ?

*** Đặc biệt hóa khi xét trường hợp n = 2.**

Dể thấy khi n = 2 thì ta tạo được một tam giác MA_1A_2.

Lời bình :

- Khi n = 2 ta thấy ***số tam giác*** được tạo ra bằng ***số đoạn thẳng*** được tạo ra từ hai điểm A_1,A_2 (ΔMA_1A_2 xác định khi biết đỉnh M và cạnh đáy A_1A_2). Đến đây ta định hướng để giải bài toán tổng quát : ***Đếm số đoạn thẳng*** được tạo ra từ n điểm : A_1 , A_2 ,., A_n.

Bài giải : Dể thấy với n điểm : A_1 , A_2 ,., A_n trên a ta tạo được : $\frac{n(n-1)}{2}$ đoạn thẳng.

Nối điểm M với $\frac{n(n-1)}{2}$ đoạn thẳng đó ta được $\frac{n(n-1)}{2}$ tam giác. ❐

III. Một số bài tập tự luyện :

1. Chứng minh rằng tổng khoảng cách từ điểm M bất kỳ nằm trong tam giác đều cạnh a đến ba cạnh của tam giác đó là số không đổi.

2. Cho hai đường thẳng song song (d_1) và (d_2). Trên (d_1) lấy m điểm phân biệt và trên (d_2) lấy n điểm phân biệt ($m,n \geq 2$). Tính số tam giác có các đỉnh là 3 điểm trong số m + n điểm đã cho trên (d_1) và (d_2).

3. Hai người cùng tổ chức trò chơi. Lần lượt mỗi người cùng đặt một đồng xu lên một cái bàn tròn. Ai đặt được đồng xu cuối cùng sẽ thắng cuộc. Hãy đưa ra cách chơi để người đi trước thắng cuộc.

PHAN ANH

PHAN VĂN ANH
TRƯỜNG THPT SỐ 1 QUẢNG TRẠCH - QUẢNG BÌNH.
0983 077 456