TỪ MỘT BÀI TOÁN DỄ ĐẾN NHỮNG BÀI TOÁN KHÓ.

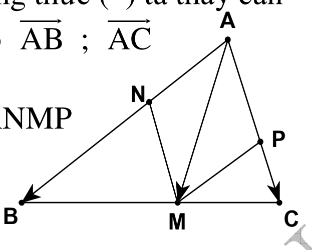
PHAN VĂN ANH
GV : THPT LƯƠNG THẾ VINH - QUẢNG BÌNH

Trong toán học nhiều khi từ một kết quả đơn giản nếu biết khai thác thì có nhiều ứng dụng để giải để giải các bài toán khác. Ngoài ra việc phát hiện mối liên hệ giữa các bài toán là một điều rất cần thiết cho người học toán.

*** Bài toán xuất phát :** Cho tam giác ABC gọi M là một điểm bất kỳ nằm trên BC.

Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AM} = \frac{MC}{BC}.\overrightarrow{AB} + \frac{MB}{BC}.\overrightarrow{AC}$

* **Phân tích** : Nhìn vào đẳng thức (*) ta thấy cần biểu diễn $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$



Dựng hình bình hành : ANMP

Ta có : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP}$.

Từ đây tìm α ; β để : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP} = \alpha.\overrightarrow{AB} + \beta.\overrightarrow{AC}$

$$\frac{AN}{AB} = \frac{CM}{BC} \Rightarrow AN = \frac{CM}{BC}.AB \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{MC}{BC}.\overrightarrow{AB}$$

$$\frac{AP}{AB} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow AP = \frac{BM}{BC}.AC \Rightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{MB}{BC}.\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{MC}{BC}.\overrightarrow{AB} + \frac{MB}{BC}.\overrightarrow{AC}$$

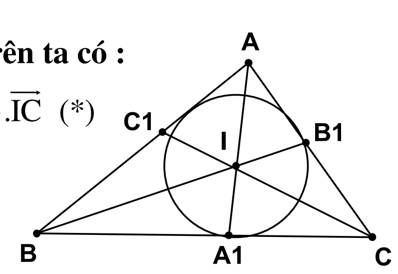
Sau đây ta sẽ thấy ứng dụng của bài toán này để giải các bài tập khác khó hơn.

✪ Bài toán 1 : Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm I. CMR: $a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

* **Bài giải** : Gọi A_1 , B_1 , C_1 lần lượt là giao điểm của : AI , BI , CI với BC , AC , AB.

Áp dụng bài toán trên ta có :

$$\overrightarrow{IA_1} = \frac{A_1C}{BC}.\overrightarrow{IB} + \frac{A_1B}{BC}.\overrightarrow{IC} \quad (*)$$



Do đó cần biểu diễn : $\overrightarrow{IA_1}$ theo $\overrightarrow{IA}$;

Do I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$

$$\frac{IA_1}{IA} = \frac{BA_1}{BA} \Rightarrow IA_1 = \frac{BA_1}{BA}.IA \Rightarrow \overrightarrow{IA_1} = -\frac{BA_1}{BA}.\overrightarrow{IA}$$

Thay vào (*) ta được :

$$-\frac{BA_1}{BA}.\overrightarrow{IA} = \frac{A_1C}{BC}.\overrightarrow{IB} + \frac{A_1B}{BC}.\overrightarrow{IC}$$

$$\Leftrightarrow -BC.\overrightarrow{IA} = BA.\frac{A_1C}{BA_1}.\overrightarrow{IB} + BA.\overrightarrow{IC}$$

Mặt khác : $\frac{A_1C}{A_1B} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$ (tính chất phân giác)

$$-BC.\overrightarrow{IA} = BA.\frac{A_1C}{BA_1}.\overrightarrow{IB} + BA.\overrightarrow{IC}$$

$$\Leftrightarrow -a\overrightarrow{IA} = c.\frac{b}{c}.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} \Leftrightarrow a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

*** Chú ý :**

1. Ta có thể giải bài toán trên bằng cách chuyển các vectơ có trong đẳng thức (*) về các vectơ mà điểm đầu là điểm A.

$$a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{b}{2p}.\overrightarrow{AB} + \frac{c}{2p}.\overrightarrow{AC}$$

Do đó cần biểu diễn : $\overrightarrow{AI}$ theo $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$

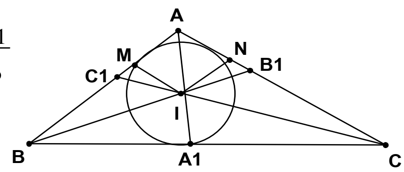
Dựng hình bình hành AMIN ta có $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$

Từ đây ta tìm α ; β để :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \alpha.\overrightarrow{AB} + \beta.\overrightarrow{AC}$$

$$\frac{MA}{MB} = \frac{IB_1}{IB} = \frac{AB_1}{AB}$$

$$\Rightarrow AM = \frac{AB_1.MB}{AB}$$



$$\frac{AB_1}{CB_1} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \frac{AB_1}{AB_1 + CB_1} = \frac{BA}{BA + BC}$$

$$\Rightarrow \frac{AB_1}{b} = \frac{c}{c+a} \Rightarrow AB_1 = \frac{bc}{c+a} \Rightarrow AM = \frac{bc}{a+b+c}$$

Tương tự : $AN = \frac{bc}{a+b+c}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \frac{AM}{AB}.\overrightarrow{AB} + \frac{AN}{AC}.\overrightarrow{AC}$$

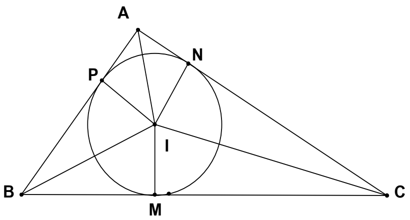
$$= \frac{b}{a+b+c}.\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}.\overrightarrow{AC} = \frac{b}{2p}.\overrightarrow{AB} + \frac{c}{2p}.\overrightarrow{AC}$$

2. Cũng có thể giải bài toán này bằng cách biểu diễn $\overrightarrow{IA}$ theo $\overrightarrow{IB}$; $\overrightarrow{IC}$. Các bạn tự thực hiện.

3. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh : BC , CA , AB lần lượt tại :

M , N , P. Khi đó : $\begin{cases} AP = AN = p - a \\ BM = BP = p - b \\ CN = CM = p - c \end{cases}$

✪ Bài toán 2 : Đường tròn tâm I nội tiếp của $\triangle$ABC tiếp xúc với các cạnh :BC , CA , AB tại : M , N , P. Chứng minh : $a.\overrightarrow{IM} + b.\overrightarrow{IN} + c.\overrightarrow{IP} = \vec{0}$



*** Bài giải :**

Áp dụng bài toán trên ta có :

$$\overrightarrow{IM} = \frac{MC}{BC}.\overrightarrow{IB} + \frac{MB}{BC}.\overrightarrow{IC}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a.\overrightarrow{IM} = (p-c).\overrightarrow{IB} + (p-b).\overrightarrow{IC} \quad (1) \\ b.\overrightarrow{IN} \;= (p-a).\overrightarrow{IC} + (p-c).\overrightarrow{IA} \quad (2) \\ c.\overrightarrow{IP} \;= (p-b).\overrightarrow{IA} + (p-a).\overrightarrow{IB} \quad (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow a.\overrightarrow{IM} + b.\overrightarrow{IN} + c.\overrightarrow{IP}$$

$$= (2p-b-c)\overrightarrow{IA} + (2p-a-c).\overrightarrow{IB} + (2p-a-b).\overrightarrow{IC}$$

$$= a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow a.\overrightarrow{IM} + b.\overrightarrow{IN} + c.\overrightarrow{IP} = \vec{0}$$

✪ Bài toán 3 : Cho tam giác ABC có ba cạnh : AB = c , BC = a , AC = b. Gọi M là là điểm bất kỳ trong tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$S_a.\overrightarrow{MA} + S_b.\overrightarrow{MB} + S_c.\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

Với : $S_a = S_{\Delta MBC}$; $S_b = S_{\Delta MAC}$; $S_c = S_{\Delta MAB}$

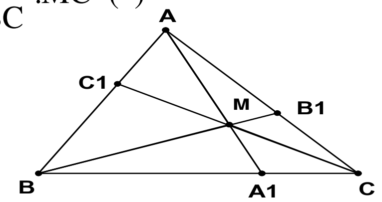
*** Bài giải :**

Áp dụng bài toán trên ta có :

$$\overrightarrow{MA_1} = \frac{A_1C}{BC}.\overrightarrow{MB} + \frac{A_1B}{BC}.\overrightarrow{MC} \quad (*)$$

Ta biểu diễn :

$\overrightarrow{MA_1}$ theo $\overrightarrow{MA}$



$$\frac{MA_1}{MA} = \frac{S_{MA_1B}}{S_{MAB}} = \frac{S_{MA_1C}}{S_{MAC}} = \frac{S_{MA_1B} + S_{MA_1C}}{S_{MAB} + S_{MAC}} = \frac{S_a}{S_b + S_c}$$

$$MA_1 = \frac{S_a}{S_b + S_c}.MA \Rightarrow \overrightarrow{MA_1} = -\frac{S_a}{S_b + S_c}.\overrightarrow{MA}$$

Ta lại có : $\frac{A_1C}{A_1B} = \frac{S_{MA_1C}}{S_{MA_1B}}$. Mặt khác :

$$\frac{S_{\Delta MA_1C}}{S_{\Delta MAC}} = \frac{MA_1}{MA} = \frac{S_{\Delta MA_1B}}{S_{\Delta MAB}} \Rightarrow \frac{S_{\Delta MA_1C}}{S_{\Delta MA_1B}} = \frac{S_{\Delta MAC}}{S_{\Delta MAB}} = \frac{S_b}{S_c}$$

$$\frac{A_1C}{A_1B} = \frac{S_b}{S_c} \Rightarrow \frac{A_1C}{A_1C + A_1B} = \frac{S_b}{S_b + S_c}$$

$\Rightarrow \frac{A_1C}{BC} = \frac{S_b}{S_b + S_c}$ Tương tự : $\frac{A_1B}{BC} = \frac{S_c}{S_b + S_c}$

$$(*) \Rightarrow -\frac{S_a}{S_b + S_c}.\overrightarrow{MA} = \frac{S_b}{S_b + S_c}.\overrightarrow{MB} + \frac{S_C}{S_b + S_c}.\overrightarrow{MC}$$

Thay vào (*) : $-S_a.\overrightarrow{MA} = S_b.\overrightarrow{MB} + S_c.\overrightarrow{MC}$

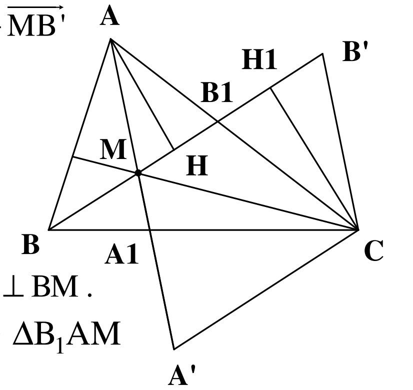
$$\Rightarrow S_a.\overrightarrow{MA} + S_b.\overrightarrow{MB} + S_c.\overrightarrow{MC} = \vec{0} \text{ Đpcm}$$

*** Chú ý** :

1. Ta có thể giải bài toán trên bằng cách biểu diễn $\overrightarrow{MC}$ theo $\overrightarrow{MA}$; $\overrightarrow{MC}$

Dựng hình bình hành : MB'CA'.

Ta có : $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'}$



Kẻ : $AH \perp BM$, $CH_1 \perp BM$.

Dễ thấy : $\Delta B_1CB' \sim \Delta B_1AM$

Khi đó :

$$\frac{B'C}{MA} = \frac{CH_1}{AH} \; ; \; \frac{MA'}{MA} = \frac{CH_1}{AH}$$

Do : $S_{\Delta MAB} = \frac{1}{2}AH.BM$; $S_{\Delta MBC} = \frac{1}{2}CK.BM$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta MAB}} = \frac{CH_1}{AH} \Rightarrow \frac{MA'}{MA} = \frac{S_a}{S_c} \Rightarrow MA' = \frac{S_a}{S_c}.MA$$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA'} = -\frac{S_a}{S_c}.\overrightarrow{MA}$ Tương tự : $\overrightarrow{MB'} = -\frac{S_b}{S_c}.\overrightarrow{MB}$

$$\Rightarrow S_a.\overrightarrow{MA} + S_b.\overrightarrow{MB} + S_c.\overrightarrow{MC} = \vec{0} \text{ Đpcm.}$$

Bài tập : Cho $\triangle$ABC nhọn có trực tâm H.

CMR : $\tan A.\overrightarrow{HA} + \tan B.\overrightarrow{HB} + \tan C.\overrightarrow{HC} = \vec{0}$

Những bài toán trên đây tuy không mới. Thế nhưng khi hệ thống lại chúng ta thấy còn có nhiều thú vị. Tất nhiên còn có các cách khác để giải những bài toán này. Chúc các bạn thành công với những ước mơ của mình.