DÙNG PHƯƠNG PHÁP PHÂN CHIA ĐỂ TÌM GIỚI HẠN DẠNG VÔ ĐỊNH

A ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong khi tìm giới hạn ở trung học phổ thông ta gặp các dạng vô định trong bốn dạng đó ta đều qui được về dạng $\frac{0}{0}$. Ở lớp 11 học sinh chưa học đạo hàm vì vậy chưa dùng được qui tắc LÔ PI TAN. Hầu như học thường dùng phương pháp phân tích thành nhân tử hoặc nhân liên hợp để khử dạng vô định .Tuy nhiên công việc thường dài dòng và phức tạp, đối với một số bài toán nếu làm như vậy nhiều khi không thành công.

Sau đây tôi xin đưa ra một vài phương pháp khử dạng vô định(đả có trong một số tài liệu). Ở đây tôi đưa ra các ví dụ cụ thể ,phương pháp giải đầy đủ từ dể đến khó, đưa ra phương pháp giải tổng quát . Chủ yếu là phương pháp tách

(gọi là phương pháp thêm bớt hay còn giọi là phương pháp chia để trị).Nhằm giúp học sinh tham khảo ứng dụng trong khi học các bài toán giới hạn của bốn sạng vô định.

B NỘI DUNG

Trước hết ta có kết quả sau (để sử dụng khi gặp giới hạn này):

Bằng phương pháp nhân liên hợp ta tính được

L= $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x - a} = \frac{a^{\frac{1-n}{n}}}{n}$ (a hằng số, n$\in$N*)

Sau đây tôi xin nêu ra các ví dụ cụ thể:

<u>Vi dụ 1</u> Tìm giới hạn:

$$L1 = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[2013]{x} - \sqrt[2014]{x}}{x - 1}$$

<u>Giải</u>

Ta giải bài toán tổng quát sau : (Áp dụng kết qủa trên với a =1)

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[m]{x}}{x-1} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt[n]{x}-1}{x-1}-\frac{\sqrt[m]{x}-1}{x-1}\right) = \frac{1}{n}-\frac{1}{m} = \frac{m-n}{m.n}$$

Do đó L1 $=\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}=\frac{2014-2013}{2013.2014}=\frac{1}{2013.2014}$

Ví dụ2: Tìm giới hạn:

$$L2 = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-x^2+3x-4}{x-2}$$

Giải

$$L_2 = \lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)-(x^2-3x+2)}{x-2} =$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}-\frac{(x-2)(x-1)}{x-2}\right) =$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{(\sqrt{x+2}+2)}-(x-1)\right) = \frac{1}{4}-1 = -\frac{3}{4}$$

Nhận xét : Nếu ta dùng phương pháp nhân liên hợp sẻ khá dài dòng .

Ví dụ 3: Tìm giới hạn:

$$L3 = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{12x+15}-\sqrt[18]{x}-2}{x-1}$$

Giải

Ta có $L3 = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt[3]{12x+15}-2}{x-1}-\frac{\sqrt[18]{x}-1}{x-1}\right)$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{12(x-1)}{(x-1)(\sqrt[3]{(12x+15)^2}+3\sqrt[3]{12x+15}+9)}-\frac{\sqrt[18]{x}-1}{x-1}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{12}{\sqrt[3]{(12x+15)^2}+3\sqrt[3]{12x+15}+9}-\frac{\sqrt[18]{x}-1}{x-1}\right) = \frac{4}{9}-\frac{1}{18} = \frac{7}{18}$$

Nhận xét : Nếu ta dùng phương pháp nhân liên hợp sẻ quá dài dòng nhiều khi không thực hiện được

<u>Ví dụ 4:</u> Tìm giới hạn

$$L_4 = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{7+2x}+\sqrt[3]{9-x}-2x^2-2x-1}{x-1}$$

<u>Giải</u>

$$L_4 = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{7+2x}-3)+(\sqrt[3]{9-x}-2)-(2x^2+2x-4)}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{7+2x}-3}{x-1}+\frac{\sqrt[3]{9-x}-2}{x-1}-\frac{2(x-1)(x+2)}{x-1}\right)$$

$$=$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{7+2x}+3\right)}+\frac{(1-x)}{(x-1)(\sqrt[3]{(9-x)^2}+2\sqrt[3]{x-9}+4)}-2(x+2)\right)$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{\left(\sqrt{7+2x}+3\right)}-\frac{1}{\sqrt[3]{(9-x)^2}+2\sqrt[3]{x-9}+4}-2(x+2)\right) =$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{12}-6 = -\frac{69}{12}$$

Nhận xét : Nếu ta dùng phương pháp nhân liên hợp sẻ quá khó khăn nói chung là học sinh không thực hiện được.

<u>Ví dụ 5 :</u> Tìm gới hạn

$$L_5 = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{7x+1} - \sqrt[6]{x} - \sqrt[12]{x}}$$

<u>Giải</u>

Ta có $$L_5 = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\dfrac{\sqrt[3]{7x+1} - \sqrt[6]{x} - \sqrt[12]{x}}{x-1}}$$

Gọi M = $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{\sqrt[3]{7x+1} - \sqrt[6]{x} - \sqrt[12]{x}}{x-1} \right.$ $\Rightarrow$

$$M = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt[3]{7x+1} - 2) - (\sqrt[6]{x} - 1) - (\sqrt[12]{x} - 1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \left(\frac{\sqrt[3]{7x+1} - 2}{x-1} - \frac{\sqrt[6]{x} - 1}{x-1} - \frac{\sqrt[12]{x} - 1}{x-1} \right) =$$

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{7(x-1)}{(x-1)\sqrt[3]{(7x-1)^2 + 2\sqrt[3]{7(x-1)}} + 2} - \frac{\sqrt[6]{x} - 1}{x-1} - \frac{\sqrt[12]{x} - 1}{x-1} \right) =$$

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{7}{(\sqrt[3]{(7x-1)^2 + 2\sqrt[3]{7(x-1)}} + 2)} - \frac{\sqrt[6]{x} - 1}{x-1} - \frac{\sqrt[12]{x} - 1}{x-1} \right) =$$

$$\frac{7}{12} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$$

Vậy $L_5 = 3$

Tóm lại :Nếu gặp giới hạn **L=** $\lim_{x\to a} \dfrac{\sqrt[m]{f} - \sqrt[n]{g}}{(x-a)^p}$ **(D**ạng $\dfrac{0}{0}$ **) Ta có :**

L= $\lim_{x\to a} \dfrac{\sqrt[n]{f} - \sqrt[n]{g}}{(x-a)^p} = \lim_{x\to a} \left[\dfrac{\sqrt[m]{f} - h}{(x-a)^p} - \dfrac{\sqrt[n]{g} - h}{(x-a)^p} \right]$

$$= \lim_{x\to a} \left[\frac{\sqrt[m]{f} - h}{(x-a)^p} + \frac{h - \sqrt[n]{g}}{(x-a)^p} \right]$$

Vấn đề ở đây là tìm **h** như thế nào để làm việc này ta xét tiếp các ví dụ sau :

Ví dụ 6: **Tìm giới hạn**

$$L_6 = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{8x^3 + x^2 + 6x + 9} - \sqrt[3]{9x^2 + 27x + 27}}{x^3}$$

Giải

Đặt f = $8x^3 + x^2 + 6x + 9 = 8x^3 + (x+3)^2$

g = $9x^2 + 27x + 27 = (x+3)^3 - x^3$

Ta được h = $x + 3$

$L_6 =$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{8x^3 + x^2 + 6x + 9} - (x+3)}{x^3} - \frac{\sqrt[3]{9x^2 + 27x + 27} - (x+3)}{x^3}\right)$$

Gọi M1=

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{8x^3 + x^2 + 6x + 9} - (x+3)}{x^3}\right) =$$

Gọi M2 = $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{8x^3 + x^2 + 6x + 9} - (x+3)}{x^3}\right.$

Dể dàng tìm được **M1=** $\frac{4}{3}$ Và **M2 =** $-\frac{1}{27}$ $\Rightarrow$ $L_6 = \frac{4}{3} + \frac{1}{27} = \frac{37}{27}$

Ví dụ 7: **Tìm giới hạn**

$$L_7 = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos 2x - 2x} - \sqrt[4]{\sqrt{1+2x^2} - 4x}}{x^2}$$

Giải

Đặt f = cos2x -2x = $1 - 2\sin^2 x - 2x = (1-x)^2 - x^2 - 2\sin^2 x$

$\Leftrightarrow \; f - (1-x)^2 = -x^2 - 2\sin^2 x$

Đặt $g = \sqrt{1+2x^2} - 4x =$

$(1-x)^4 - x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 1 + \sqrt{1-2x^2} \Leftrightarrow$

$(1-x)^4 - g =$

$x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 1 - \sqrt{1-2x^2}$

$\Rightarrow \quad h = 1 - x$

Vậy L_7 **= M + N Trong đó**

$$\text{M} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{f} - (1-x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2 - 2\sin^2 x}{x^2(\sqrt{f} + 1 + x)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-1 - 2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{f + (1-x)} = -\frac{3}{2}$$

N =

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-x) - \sqrt[4]{g}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^4 - 4x^3 + 6x + 1) - \sqrt{1-x^2}}{x^2[(1-x)^3 + (1-x)^2\sqrt[4]{g} + (1-x)\sqrt{g} + \sqrt[4]{g^3}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 4x + 6 - \frac{\sqrt{1+2x^2} - 1}{x^2}}{(1-x)^3 + (1-x)^2\sqrt[4]{g} + (1-x)\sqrt{g} + \sqrt[4]{g^3}} = \frac{5}{4}$$

Vậy L_7 **= M + N =** $-\frac{3}{2} + \frac{5}{4} = -\frac{1}{4}$

<u>Ví dụ 8:</u> Tìm giới hạn

$$L_8 = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3 + 2x^2 - 2\cos 2x} - \sqrt[4]{2 + 4x + x^3 - \sqrt{1+2x^2}}}{x^2}$$

<u>Giải</u>

Đặt f = $3+2x+x^2-2\cos 2x = (1+x)^2+2\sin^2 x$

$\Leftrightarrow \quad f-(1+x)^2 = 2\sin^2 x$

Đặt g = $2+4x+x^3-\sqrt{1+2x^2}$ =

$(1+x)^4 - x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 1 - \sqrt{1+2x^2}$

$\Leftrightarrow \quad (1+x)^4 - g = x^4 - 3x^3 + 6x^2 + \sqrt{1+2x^2} - 1$

Do đó $\quad L$ **8 = M+N**

M =

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{f}-(x+1)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{f-(x+1)^2}{x^2(\sqrt{f}+(x+1))} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2(\sqrt{f}+x+1)} = 1$$

N=

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)-\sqrt[4]{g}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^4-g}{x^2((x+1)^3+(x+1)^2\sqrt[4]{g}+(x+1)\sqrt[4]{g^2}+\sqrt[4]{g^3})}$$

=

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2-3x+6+\frac{\sqrt{1+2x^2}-1}{x^2}\right) = 6+\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2(\sqrt{1+2x^2}+1)}$$

$$= 6+\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+2x^2}+1} = 6+1 = 7$$

Do đó $L_8 = 6+1 = 7$

Nhận xét : Giới hạn này nếu dùng qui tắc LÔ PI TAN thì vẫn rất phức tạp ,còn khó hơn nhiều so với phương pháp trên .

<u>Ví dụ 9 :</u> Tìm giới hạn

$$L_9 = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sqrt{(1+2x)(1+x^2)} - \sqrt[3]{(1+3x)(1+3x)}}$$

<u>Giải</u>

Ta có $$L_9 = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\dfrac{\sqrt{(1+2x)(1+x^2)} - \sqrt[3]{1+3x)(1+3x^2)}}{x^3}}$$

Gọi $$T_9 = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{(1+2x)(1+x^{2)}} - \sqrt[3]{(1+3x)(1+3x^2)}}{x^3}$$

Đặt f = $(1+2x)(1+x^2) = (1+x)^2 + 2x^3 \Leftrightarrow$

$$f - (1+x)^2 = 2x^3$$

Đặt g = $(1+3x)(1+3x^2) = (1+x)^3 + 8x^3 \Leftrightarrow$

$$(1+x)^3 - g = -8x^3$$

Ở đây h = 1 + x

$$T_9 = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{(1+2x)(1+x^2)} - (1+x) + (1+x) - \sqrt[3]{(1+3x)(1+3x^2)}}{x^3}$$

$\Rightarrow T_9 =$ **M +N**

M =

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{f} - (1+x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^3}{x^3(\sqrt{(1+2x)(1+x^{2)}} + 1 + x} = 1$$

$x\to 0$

N =

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+1-\sqrt[3]{g}}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{-8x^3}{x^3((1+x)^2+\underset{x\to 0}{(1+x)}\sqrt[3]{g}+\sqrt[3]{g^2})}$$

$$= -\frac{8}{3}$$

$\Rightarrow T$ **9 = M +N =** $1-\frac{8}{3} = -\frac{5}{3}$ $\Rightarrow L$ **9 =** $\frac{-3}{5}$

Vậy L **9 =** $\frac{-3}{5}$

KẾT LUẬN

Trên đây là một số ví dụ và phương pháp giải các bài toán về tìm giới hạn các dạng vô định của hàm chứa phân thức . Mặc dù chưa thật đầy đủ nhưng tôi muốn giới thiệu để học sinh tham khảo nhằm giúp các em học sinh khi tìm giới hạn các dạng vô định. Mong các em học tập tốt. Sau đây là các bài tập mà phương pháp giải hoàn toàn tương tự mời các bạn giải .

Tìm gới hạn

1, $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x^2-1}-x-1}{x-3}$

2, $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{(1+2x)}-\sqrt[3]{1+3x}}$

3, $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sqrt{\cos 2x+\sqrt[3]{1+3x}}}{2}-\sqrt[3]{\frac{\cos 3x+3\cos x-\sin x+1}{4}}}{x}$

Người trình bày

Nguyễn Quang Minh