TÊN ĐỀ TÀI

BƯỚC ĐẦU TÌM HIỂU VỀ TÂM TỈ CỰ

I. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Tâm tỉ cự là một nội dung trong chương trình hình học 10. Có thể nói đây là một nội dung khó, hơi trừu tượng nên không tạo được nhiều hứng thú cho đại đa số cho các em học sinh khi tìm hiểu. Nói đến Tâm tỉ cự, nhiều học sinh tỏ ra ái ngại, lúng túng .

Tuy nhiên với những ai say mê toán học thì tâm tỉ cự là một nội dung hay và có nhiều ứng dụng. Với những bài toán véc tơ khó, có thể sử dụng kiến thức về tâm tỉ cự để có được cách giải khoa học, ngắn gọn, súc tích. Mặt khác bài toán tâm tỷ cự là một bài toán hay và có rất nhiều ứng dụng quan trọng trong việc giải các bài toán quĩ tích, bài toán cực trị sau này.

II. MỤC ĐÍCH

Trong chương trình THPT, do thời lượng chương trình có hạn mà dạng toán về Tâm tỉ cự chưa được trình bày rõ ràng, đầy đủ. Ngược lại còn rất sơ lược, chỉ mang tính chất giới thiệu qua một số bài tập chủ yếu trong sách bài tập. Đối với học sinh, do chưa được tiếp cận nhiều kiến thức về tâm tỉ cự nên khi gặp các dạng toán véc tơ khó, hầu hết học sinh thấy lúng túng và không có hướng giải hoặc hướng đi dài, không cô đọng. Đa số học sinh thường "bỏ qua" hoặc "bỏ dở" bài toán đó.

Xuất phát từ tầm quan trọng của nội dung và từ thực trạng trên, để học sinh có thể dễ dàng và tự tin hơn khi gặp các bài tập về véc tơ, giúp các em phát huy được khả năng phân tích, tổng hợp, khái quát hoá qua các bài tập nhỏ, cùng với sự tích luỹ kinh nghiệm của bản thân qua những năm giảng dạy, tôi đưa ra chuyên đề "**BƯỚC ĐẦU TÌM HIỂU VỀ TÂM TỈ CỰ**". Với những khái niệm sơ khai về tâm tỉ cự, những ví dụ điển hình, gần gũi, các em sẽ hiểu hơn về tâm tỉ cự, từ đó áp dụng linh hoạt để giải toán.

Tôi viết chuyên đề này với mong muốn giúp các em bước đầu có cách tiếp cận dễ và gần hơn với khái niệm tâm tỉ cự. Từ đó có thể áp dụng để giải một số bài toán trước hết là đơn giản và dần dần có thể áp dụng linh hoạt cho việc giải các bài toán khó hơn. Và cuối cùng là các em sẽ có một cách nhìn tổng quát về bài toán tâm tỷ cự và đặc biệt giúp các em giải tốt hơn các bài toán quĩ tích và bài toán cực trị sau này.

III. NỘI DUNG

A. ĐỊNH HƯỚNG VÀ YÊU CẦU

- Học sinh được tiếp cận ban đầu với khái niệm và các bài tập đơn giản về tâm tỉ cự.
- Trên cơ sở xác định mục tiêu khai thác triệt để đề tài qua các tiết giảng đặc thù, qua việc cung cấp tận tình các tài liệu có liên quan, giải đáp những yêu cầu cần thiết, giáo viên có thể xác định sau khi học xong chương I học sinh khá giỏi có thể áp dụng thành thạo để giải một số bài toán đặc trưng của chuyên đề.

B. BIỆN PHÁP

- Tổ chức các buổi giảng bài đặc thù với những nội dung có trọng điểm
- Hệ thống kiến thức vừa phải, ngắn gọn, dễ hiểu, súc tích.
- Hệ thống bài tập đa dạng, phong phú

1. HÌNH THÀNH KHÁI NIỆM TÂM TỈ CỰ CỦA HỆ ĐIỂM

Định nghĩa Cho n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ và n số thực $k_1, k_2, ..., k_n$ thoả mãn điều kiện : $k_1 + k_2 + ... + k_n \neq 0$ .Khi đó nếu tồn tại duy nhất một điểm G sao cho :

$$k_1.\overrightarrow{GA_1} + k_2.\overrightarrow{GA_2} + ... + k_n.\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$

Thì G được gọi là tâm tỉ cự của hệ điểm A_i gắn với các hệ số k_i .

Trong trường hợp các hệ số k_i bằng nhau $\left(i = \overline{1,n}\right)$ thì G được gọi là trọng tâm của hệ n điểm A_i , $\left(i = \overline{1,n}\right)$;

Chứng minh: Thật vậy với O tùy ý thì

$$k_1.\overrightarrow{GA_1} + k_2.\overrightarrow{GA_2} + ... + k_n.\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow k_1.\left(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OG}\right) + k_2.\left(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OG}\right) + ... + k_n.\left(\overrightarrow{OA_n} - \overrightarrow{OG}\right) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{k}\left(k_1.\overrightarrow{OA_1} + k_2.\overrightarrow{OA_2} + ... + k_n.\overrightarrow{OA_n}\right)$$

Vậy điểm G hoàn toàn xác định và duy nhất.

2. MỘT SỐ KẾT QUẢ CẦN LƯU Ý

Kết quả 1 : (Bài toán về tâm tỉ cự của hai điểm).

Cho hai điểm A,B và hai số thực α, β không đồng thời bằng 0.

Vì $\alpha.\overrightarrow{MA}+\beta.\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MA}+\beta.\overrightarrow{AB}$ nên

1) Nếu $\alpha+\beta=0$ thì không tồn tại M sao cho: $\alpha.\overrightarrow{MA}+\beta.\overrightarrow{MB}=\vec{0}$
2) Nếu $\alpha+\beta\neq 0$ thì tồn tại duy nhất điểm M sao cho: $\alpha.\overrightarrow{MA}+\beta.\overrightarrow{MB}=\vec{0}$
3) Khi đó, với mọi điểm O ta luôn có :

$$\alpha.\overrightarrow{OA}+\beta.\overrightarrow{OB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{OM}\Rightarrow\overrightarrow{OM}=\frac{\alpha.\overrightarrow{OA}+\beta.\overrightarrow{OB}}{\alpha+\beta}$$

Ví dụ như ta chọn $O\equiv A$ ta có: $\overrightarrow{AM}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}.\overrightarrow{AB}$ (1)

Vế trái của (1) là một vectơ hoàn toàn xác định,nên từ (1) ta suy ra tồn tại duy nhất điểm M thoả mãn (1) tức là thoã mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét : Điểm M xác định duy nhất từ hệ thức $\alpha.\overrightarrow{MA}+\beta.\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ với các số thực α , β thoả mãn điều kiện α + β ≠ 0 được gọi là tâm tỉ cự của hai điểm A,B ứng với bộ số (α;β).

+ Khi α = β ≠ 0, thì hệ thức : $\alpha.\overrightarrow{MA}+\beta.\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ trở thành $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ hay M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

+ Khi α ≠ 0 còn β = 0 thì hệ thức $\alpha.\overrightarrow{MA}+\beta.\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ trở thành $\alpha.\overrightarrow{MA}=\vec{0}\Leftrightarrow M\equiv A$

Khái niệm tâm tỉ cự được coi là mở rộng của khái niệm trung điểm, đầu mút của một đoạn thẳng. Bằng cách chọn bộ α , β thích hợp hệ thức trên còn cho ta nhiều khái niệm khác nữa.

Trong trường hợp α = β ≠ 0 thì công thức :

$\alpha.\overrightarrow{OA}+\beta.\overrightarrow{OB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{OM}$ trở thành $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}$ đây là một công thức quen thuộc mà ta đã biết.

Kết quả 2 : (Bài toán về tâm tỉ cự của ba điểm).

Cho ba điểm A,B,C và ba số thực α,β,γ không đồng thời bằng không $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.

Vì $\alpha.\overrightarrow{MA}+\beta.\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MA}+\beta.\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}$ nên

1) Nếu $\alpha+\beta+\gamma=0$ thì không tồn tại M sao cho: $\alpha.\overrightarrow{MA}+\beta.\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\vec{0}$
2) Nếu $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ thì tồn tại duy nhất điểm M sao cho:

$$\alpha.\overrightarrow{MA}+\beta.\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$

3) Khi đó, với mỗi điểm O ta luôn có :

$$\alpha.\overrightarrow{OA}+\beta.\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{OM}\Rightarrow\overrightarrow{OM}=\frac{\alpha.\overrightarrow{OA}+\beta.\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}}{\alpha+\beta+\gamma}$$

Ví dụ như ta chọn $O\equiv A$ ta có: $\overrightarrow{AM}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}.\overrightarrow{AB}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}.\overrightarrow{AC}$ (1)

Vế trái của (1) là một vectơ hoàn toàn xác định,nên từ (1) ta suy ra tồn tại duy nhất điểm M thoả mãn (1) tức là thoã mãn yêu cầu bài toán.

<u>Nhận xét</u>:

➢ Điểm M xác định duy nhất từ hệ thức $\alpha.\overrightarrow{MA}+\beta.\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ với các số thực (α,β,γ) thoả mãn điều kiện $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ được gọi là tâm tỉ cự của hai điểm A,B,C ứng với bộ số (α,β,γ).

➢Trong trường hợp $\alpha=\beta=\gamma\neq 0$ thì đẳng thức :
$\alpha.\overrightarrow{MA}+\beta.\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ trở thành $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow M\equiv G$
Hay M là trọng tâm của tam giác △ABC .

➢Trong trường hợp $\beta=\gamma=0,\alpha\neq 0$ đẳng thức : $\alpha.\overrightarrow{MA}+\beta.\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ trở thành : $\alpha.\overrightarrow{MA}=\vec{0}\Leftrightarrow M\equiv A$.

➢Trong trường hợp : $\alpha=\beta\neq 0,\gamma=0$ thì đẵng thức :
$\alpha.\overrightarrow{MA}+\beta.\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ trở thành : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ hay M là trung điểm của AB.

➢Như vậy tuỳ thuộc vào các cách chọn bộ (α,β,γ) mà tâm tỉ cự của bộ ba điểm A,B,C có thể là trọng tâm của △ABC ,là một trong ba điểm A,B,C hoặc là trung điểm của một trong ba đoạn thẳng AB,BC,CA...

➢Khi $\alpha=\beta=\gamma\neq 0$ thì hệ thức $\alpha.\overrightarrow{OA}+\beta.\overrightarrow{OB}+\gamma.\overrightarrow{OC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{OM}$ trở thành :
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OM}$ với mọi điểm O, đây là một đẳng thức quen thuộc mà ta đã biết.

3. HÌNH THÀNH KHÁI NIỆM TRỌNG TÂM CỦA HỆ ĐIỂM

Cho n điểm : $A_1, A_2, ..., A_n$. Tồn tại duy nhất điểm G sao cho:

$\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + ... + \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$ thì được gọi là trọng tâm của hệ điểm n : $A_1, A_2, ..., A_n$

* Khi n = 2 thì trọng tâm hệ hai điểm sẽ trùng với trung điểm của đoạn thẳng.

* Khi n = 3 thì trọng tâm hệ ba điểm sẽ trùng với trọng tâm tam giác.

* Khi n = 4 thì trọng tâm hệ bốn điểm sẽ trùng với trọng tâm tứ giác. (Giao điểm của 2 đoạn nối trung điểm của 2 cạnh đối diện, hoặc là trung điểm của đoạn nối trung điểm 2 đường chéo)

Chứng minh Lấy O cố định.

Khi đó ta có được $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + ... + \overrightarrow{GA_n} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{n}\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n}\right)$

G hoàn toàn xác định.

Giả sử có G' thoả mãn yêu cầu bài toán.

Khi đó : $\overrightarrow{OG'} = \frac{1}{n}\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n}\right) \Rightarrow \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG'} \Leftrightarrow G \equiv G'$

Vậy tồn tại duy nhất điểm G.

Chú ý: Cho n điểm : $A_1, A_2, ..., A_n$ có G là trọng tâm.

$\forall$ M tuỳ ý: $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{n}\left(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + ... + \overrightarrow{MA_n}\right)$

Chứng minh

Ta có $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + ... + \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$

$\forall$ M tuỳ ý: $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + ... + \overrightarrow{GA_n} = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA_1} - \overrightarrow{MG}\right) + \left(\overrightarrow{MA_2} - \overrightarrow{MG}\right) + ... + \left(\overrightarrow{MA_n} - \overrightarrow{MG}\right) = \vec{0}$

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{n}\left(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + ... + \overrightarrow{MA_n}\right)$$

4. MỘT SỐ BÀI TOÁN ÁP DỤNG

Bài toán 1 : Cho △ABC có ba cạnh *BC = a, CA = b, AB = c* Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp △ABC. Chứng minh rằng I là tâm tỉ cự của hệ ba điểm A,B,C ứng với bộ số *a,b,c*

Bài giải

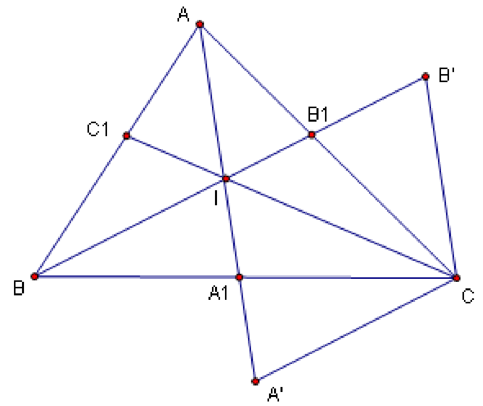
Ta phải chứng minh: $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Ba đường phân giác AA_1, BB_1, CC_1 cắt nhau tại I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

Vẽ hình bình hành IB'CA'.

Theo quy tắc hình bình hành ta có :

$\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{IB'}$.



Trong $\triangle BB'C$: IA_1 // B'C . Theo định lý Talet ta có : $\frac{IB'}{IB} = \frac{A_1C}{A_1B}$ (1).

Vì AA_1 là đường phân giác nên ta có : $\frac{A_1C}{A_1B} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra : $\frac{IB'}{IB} = \frac{A_1C}{A_1B} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$

$\frac{\overrightarrow{IB'}}{\overrightarrow{IB}} = -\frac{b}{c}$ (do $\overrightarrow{IB}$ và $\overrightarrow{IB'}$ đối nhau) (3) .

Lập luận hoàn toàn tương tự ta có: $\frac{\overrightarrow{IA'}}{\overrightarrow{IA}} = -\frac{a}{c}$ (4).

Từ (3) và (4) ta suy ra : $\overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{IB'} = -\frac{b}{c}\overrightarrow{IB} - \frac{a}{c}\overrightarrow{IA}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{IB'} = -\frac{b}{c}\overrightarrow{IB} - \frac{a}{c}\overrightarrow{IA}$$

$$\Leftrightarrow a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

Rõ ràng a + b + c ≠ 0 nên từ đẳng thức trên ta suy ra I là tâm tỉ cự của bộ ba điểm A,B,C ứng với bộ số a,b,c .□ (đpcm).

Bài toán 2 : Cho $\triangle ABC$ không vuông.Chứng minh rằng trực tâm H của $\triangle ABC$ là tâm tỉ cự của bộ ba điểm A,B,C ứng với bộ số : *(tanA ; tanB ; tanC).*

Bài giải

Ta phải chứng minh: $\tan A.\overrightarrow{HA} + \tan B.\overrightarrow{HB} + \tan C.\overrightarrow{HC} = \vec{0}$

Các đường cao của $\triangle ABC$ cắt nhau tại trực tâm H .Vẽ hình bình hành HB'CA'.Trong $\triangle BB'C$ ta có HA_1 // B'C.

Suy ra : $\dfrac{HB'}{HB} = \dfrac{A_1C}{A_1B}$

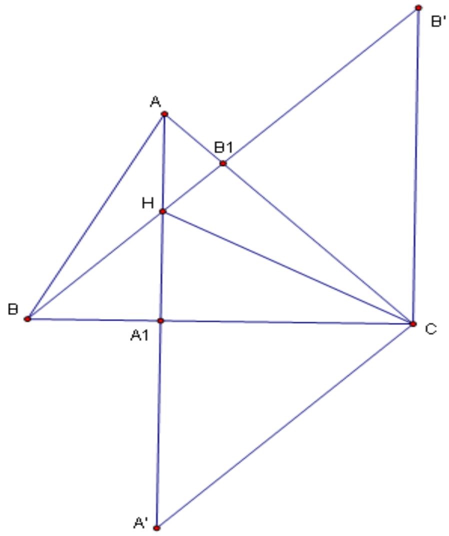
Ta lại có : $A_1C = AA_1.\cot C$.
$A_1B = AA_1.\cot B$.

Do đó :

$$\frac{HB'}{HB} = \frac{A_1C}{A_1B} = \frac{AA_1.\cot C}{AA_1.\cot B} = \frac{\tan B}{\tan C}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{HB'} = -\frac{\tan B}{\tan C}.\overrightarrow{HB} \quad (1).$$

(vì $\overrightarrow{HB}$ và $\overrightarrow{HB'}$ đối nhau).



Hoàn toàn tương tự ta có : $\overrightarrow{HA'} = -\dfrac{\tan A}{\tan C}.\overrightarrow{HA}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có : $\overrightarrow{HA'} + \overrightarrow{HB'} = -\dfrac{\tan A}{\tan C}.\overrightarrow{HA} - \dfrac{\tan B}{\tan C}.\overrightarrow{HB}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA'} + \overrightarrow{HB'} = -\frac{\tan A}{\tan C}.\overrightarrow{HA} - \frac{\tan B}{\tan C}.\overrightarrow{HB}$$

$$\Leftrightarrow \tan A.\overrightarrow{HA} + \tan B.\overrightarrow{HB} + \tan C.\overrightarrow{HC} = \vec{0} \quad (3).$$

Ta luôn có : $\tan A + \tan B + \tan C \neq 0$,do đó từ định nghĩa và đẳng thức (3) ta suy ra H là tâm tỉ cự của hệ ba điểm A,B,C ứng với bộ số : (tanA ; tanB ; tanC)

Trong trường hợp $\triangle$ABC có một góc tù được chứng minh hoàn toàn tương tự. □ (Đpcm)

<u>Bài toán 3</u> : Cho tứ giác *ABCD*.Gọi *G* là trọng tâm của tam giác *ABC*.Điểm I là điểm thuộc cạnh *GC* sao cho : *IC = 3GC.*

Chứng minh rằng với mọi M ta luôn có hệ thức :

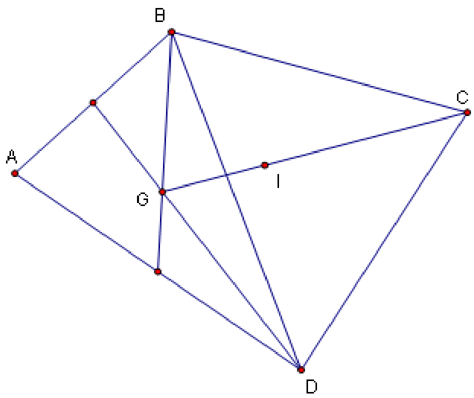
$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MI}$$

<u>Bài giải</u>

Theo giả thiết,G là trọng tâm của $\triangle$ABD nên :

G là tâm tỉ cự của bộ ba điểm A,B,D ứng với bộ số (1;1;1).Nghĩa là : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = 3\overrightarrow{IG}$ (1)

Mặt khác : $IC = 3IG \Rightarrow \overrightarrow{IC} = -3\overrightarrow{IG}$ (Do $\overrightarrow{IC}$ và $\overrightarrow{IG}$ là hai vectơ đối nhau).



Thế $\overrightarrow{IC}=-3\overrightarrow{IG}$ vào biểu thức (1) ta có : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

Do đó với mọi điểm M ta luôn có :

$$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{MD}=\vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MI}$ □,(đpcm).

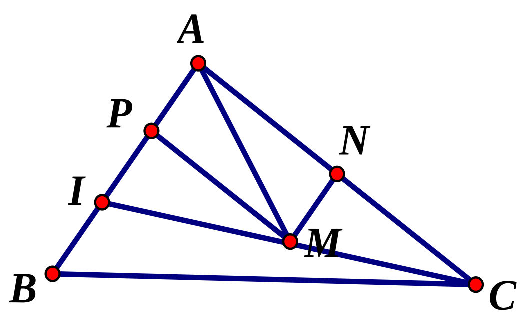
Bài toán 4 Cho tam giác ABC. Tìm điểm M sao cho

a) $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ b) $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

Bài giải

a) **Cách 1**: Theo **Kết quả 2** thì với bộ 3 số $\alpha=1,\beta=2,\gamma=3$ ta suy ra với mỗi điểm O: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=\frac{1}{6}\overrightarrow{OM}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$

Chọn $O\equiv A$, ta có $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.



Khi đó M là đỉnh còn lại của hình bình hành APMQ trong đó

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

(Ta có thể chọn O là các điểm B, C)

Cách 2: Tồn tại I sao cho $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Khi đó $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MI}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}=-\overrightarrow{MC}$

Vậy M là trung điểm của đoạn IC.

b) Theo **Kết quả 2** thì với bộ 3 số $\alpha=1,\beta=2,\gamma=-3\Rightarrow \alpha+\beta+\gamma=0$ ta suy ra không có M nào thỏa mãn điều kiện.

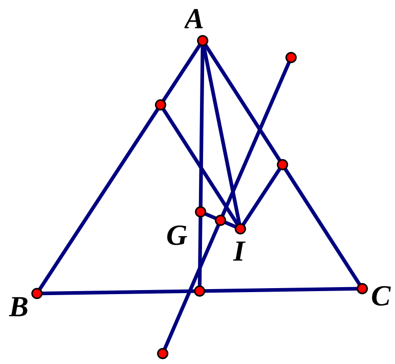
Bài toán 8 Cho tam giác ABC. Tìm điểm M trên sao cho

$$2\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|$$

Bài giải

Chọn G là trọng tâm tam giác ABC. Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$ (1)

Gọi I là điểm sao cho $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. (I được xác định như trong bài toán 9)



Khi đó :

$2\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right| \Leftrightarrow 2\left|3\overrightarrow{MG}\right|=\left|6\overrightarrow{MI}\right|$

$\Leftrightarrow MG = MI$

Suy ra M thuộc trung trực của đoạn GI.

Bài toán 5 Cho tam giác ABC .

1)Hãy dựng điểm I là tâm tỉ cự của ba điểm *A,B,C* ứng với bộ số *(3;-2;1)*.

2)Chứng minh rằng đường thẳng nối hai điểm *MN* được xác định từ hệ thức $\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ luôn đi qua một điểm cố định.

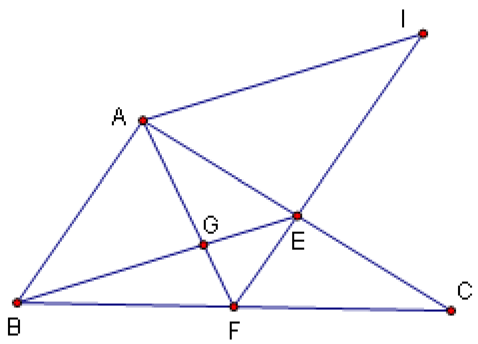
3) Tìm quỹ tích của *M* sao cho: $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right|$.

4)Tìm quỹ tích của *M* sao cho : $2\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=3\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$.

5) Tìm quỹ tích của *M* sao cho: $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|4\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$.

Bài giải

1) Điểm I là tâm tỉ cự của bộ ba điểm A,B,C ứng với bộ số (3;-2;1) nên điểm I cần tìm yhoả mãn hệ thức sau :



$3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}\right)+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{IE}=\vec{0}$ (Với E là trung điểm của đoạn AC).

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IE}=\overrightarrow{AB}$.

Suy ra I là đỉnh thứ tư của hình bình hành ABEI (với E là trung điểm của AC).

2)Theo tính chất của tâm tỉ cự ta có :

$3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=(3-2+1)\overrightarrow{MI} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}$

Suy ra : $\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}$

Hay $\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{MI}$.

Do đó ba điểm M,N,I luôn thẳng hàng ,hay mọi đường thẳng nối hai điểm M,N đều đi qua một điểm cố định. (đpcm).

3) Theo tính chất của tâm tỉ cự ta suy ra :

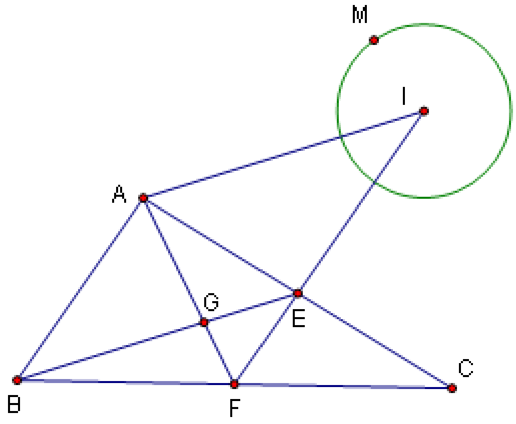
$3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}$

Do đó : $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right|$

$\Leftrightarrow \left|2\overrightarrow{MI}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right| \Leftrightarrow 2MI=AB$

$\Leftrightarrow MI=\dfrac{AB}{2}$.

Vậy quỹ tích điểm M là đường tròn tâm I có bán kính bằng $\dfrac{AB}{2}$.



4) Gọi G là trọng tâm của $\triangle$ABC .

Và F là trung điểm của cạnh BC.Ta có :

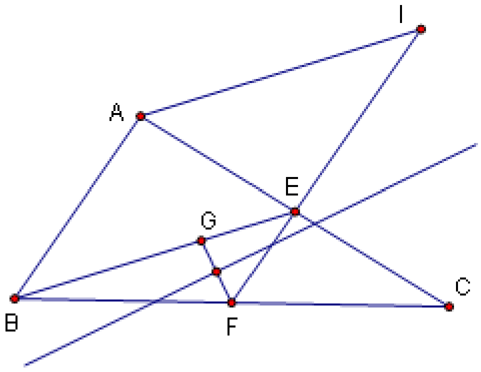
$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}$.

$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MF}$.

Do đó : $2\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=3\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$

$\Leftrightarrow 2\left|3\overrightarrow{MG}\right|=3\left|2\overrightarrow{MF}\right|$

$\Leftrightarrow 6MG=6MF \Leftrightarrow MG=MF$.



Suy ra quỹ tích của M chính là đường Trung trực của đoạn thẳng GF với G là trọng tâm của $\triangle$ABC ,và F là trung điểm của BC.

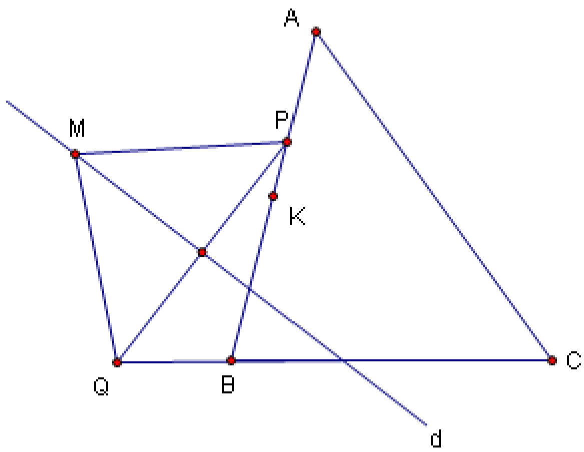
5) Gọi P là tâm tỉ cự của hai điểm A,B ứng với bộ số (2;1),và K là trung điểm của canh AB.Khi đó P thoả mãn đẳng thức véctơ sau :

$2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{PA}+\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PK}=\vec{0}$.

Tương tự gọi Q là tâm tỉ cự của hai điểm B,C ứng với bộ số (4;-1).Khi đó Q thoả mãn đẳng thức véctơ sau : $4\overrightarrow{QB}-\overrightarrow{QC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{QB}+\left(\overrightarrow{QB}-\overrightarrow{QC}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$ hay $\overrightarrow{QB}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.



Theo tính chất của tâm tỉ cự ta có :

$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=(2+1)\overrightarrow{MP}=3\overrightarrow{MP}$;

$4\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=(4-1)\overrightarrow{MQ}=3\overrightarrow{MQ}$;

Từ đẳng thức : $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|4\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ ta suy ra :

$\left|3\overrightarrow{MP}\right|=\left|3\overrightarrow{MQ}\right|$ Hay MP = MQ .

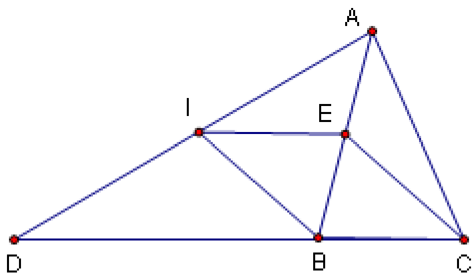
Do đó quỹ tích điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng PQ.

<u>Bài toán 6</u> Cho tam giác ABC.

1) Xác định điểm I sao cho nó là tâm tỉ cự của ba điểm A,B,C ứng với bộ số : (1;3;-2). Xác định điểm D sao cho nó là tâm tỉ cự của hai điểm B,C ứng với bộ số : (3;-2).
2) Chứng minh rằng A,I,D thẳng hàng .
3) Gọi E là trung điểm của *AB* và N là một điểm sao cho : $\overrightarrow{AN}=k\overrightarrow{AC}$ hãy xác định *k* sao cho *AD*,*EN*,*BC* đồng quy.
4) Tìm quỹ tích điểm M sao cho : $\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right|-\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$;

<u>Bài giải</u>

1) Giả sử I là tâm tỉ cự của ba điểm A,B,C ứng với bộ số (1;3;-2) ,E là trung điểm của AB.



Khi đó I thoả mãn đẳng thức véctơ sau :

$$\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}-2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+2\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}\right)=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IE}+2\overrightarrow{CB}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{IE}=\overrightarrow{BC}$$

Vậy I là đỉnh thứ tư của hình bình hành BCEI.

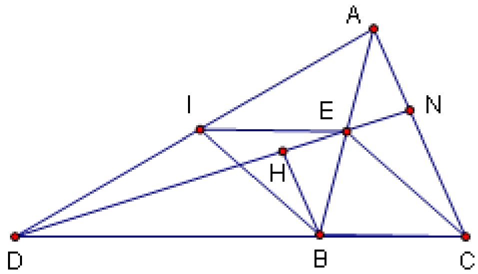
Gọi D là tâm tỉ cự của hai điểm B,C ứng với bộ số (3;-2).Khi đó D thoả mãn đẳng thức sau :

$3\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}+2\left(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{CB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{BC}$

Vậy B,C,D cùng nằm trên một đường thẳng,B nằm giữa C,D và DB = 2BC



2) Chứng minh A,I,D thẳng hàng:

E là trung điểm của AB $\Rightarrow 2\overrightarrow{IE}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}$ .Thay $2\overrightarrow{IE}=2\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DB}$ vào đẳng thức trên ta được : $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB} \Rightarrow \overrightarrow{DB}-\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \overrightarrow{DI}=\overrightarrow{IA}$ suy ra A,I,D thẳng hàng. (đpcm).

3) Theo chứng minh trên ta có AD và BC giao nhau tại D .Giả sử DE cắt AC tại N,N thuộc AC,theo giả thiết $\overrightarrow{AN}=k\overrightarrow{AC}$,do đó k > 0 .Kẻ BH song song với AC, H thuộc DN.

$$\Delta HEB=\Delta NEA \Rightarrow BH=NA.$$

Theo định lý Talet ta có : $\dfrac{BH}{CN}=\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{2}{3} \Rightarrow BH=\dfrac{2}{3}CN$.

$$\Rightarrow AN=\frac{2}{3}NC=\frac{2}{5}AC$$

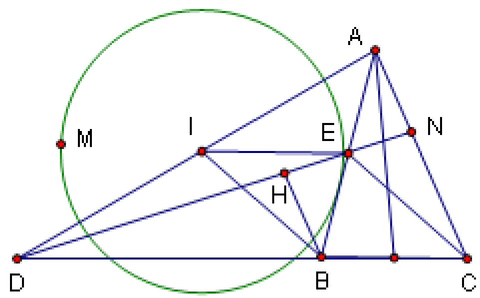
(Vì $AN=\dfrac{2}{3}NC \Leftrightarrow AN+NC=\dfrac{2}{3}NC+NC=\dfrac{5}{3}NC \Leftrightarrow AC=\dfrac{5}{3}NC$

$$\Leftrightarrow AC=\frac{5}{3}NC=\frac{5}{3}.\frac{3}{2}.AN \Leftrightarrow AC=\frac{5}{2}AN \Leftrightarrow AN=\frac{2}{5}AC \quad).$$

Suy ra : $\overrightarrow{AN}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC} \Rightarrow k=\dfrac{2}{5}$.

Vậy Với $k=\dfrac{2}{5}$ thì AD,BC,EN đồng quy tại D.

5) Gọi J là trung điểm của BC.Theo tính chất của tâm tỉ cự ta có :



$$\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}.$$

Mặt khác :

$$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)$$

$$=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}=-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=-2\overrightarrow{AJ}.$$

Do đó : $\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right|-\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$

$$\Leftrightarrow 2\left|\overrightarrow{MI}\right|=2\left|\overrightarrow{AJ}\right| \Leftrightarrow MI=AJ.$$

Vậy quỹ tích điểm M là đường tròn tâm I bán kinh AJ.

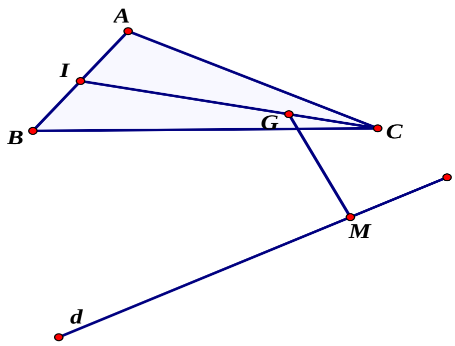
<u>Bài toán 7</u> Cho tam giác ABC và đường thẳng d. Tìm điểm M trên sao cho

$$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|$$ nhỏ nhất.

<u>Bài giải</u>

Chọn G là điểm sao cho $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ (1)

Khi đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|=\left|5\overrightarrow{MG}\right|=5MG$



$\Rightarrow\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất khi chỉ khi MG nhỏ nhất.

$\Rightarrow M$ là hình chiếu của G lên d.

- Xác định điểm G:

Với bộ số (1;1;3) ta có $(1)\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=5\overrightarrow{OG}$

Chọn $O\equiv C\Rightarrow\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=5\overrightarrow{CG}\Leftrightarrow\overrightarrow{CG}=\frac{1}{5}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\overrightarrow{CG}=\frac{1}{5}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)=\frac{2}{5}\overrightarrow{CI}$

(I là trung điểm của AB)

IV. KẾT LUẬN

Tâm tỉ cự là một có một vai trò to lớn trong việc phát triển và đơn giản hóa các bài toán hình học véc tơ. Mục đích của tôi là giúp các em học sinh có thể dễ dàng và tự tin hơn khi gặp các bài tập về véc tơ, giúp các em phát huy được khả năng phân tích, tổng hợp, khái quát hoá qua các bài tập nhỏ.

Trên đây là những bài tập mà tôi thấy phù hợp với các em học sinh khi mới bắt đầu và say mê tìm hiểu về tâm tỉ cự. Trên cơ sở các bài tập đó, các em có thể mở rộng các dạng bài tập, phát huy các ý nhỏ trong từng bài, đó cũng là ý kiến chủ quan của cá nhân tôi. Rất mong nhận được sự góp ý của các Thầy, Cô để bài viết của tôi được hoàn thiện hơn. Xin chân thành cảm ơn!