Trong các giờ học về phần: Các phép biến hình, ứng dụng của nó học sinh thường nắm chưa chắc, chưa hiểu bản chất; khả năng khaí quát , phân tích còn hạn chế, đặc biệt là phần ứng dụng các phép biến hình. Vì vậy học sinh còn lúng túng, khó hiểu chưa kích thích được nhu cầu học tập của học sinh. Để các em tiếp thu bài một cách có hiệu quả tôi xin đưa ra một vài **dạng bài tập cơ bản** như sau:

Dạng 1: Xác định ảnh của một hình qua phép biến hình:

Phương pháp chung:

-Sử dụng định nghĩa.

-Sử dụng biểu thức toạ độ của phép biến hình.

-Sử dụng các tính chất của phép biến hình.

Bài 1: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho véctơ $\vec{v}(-2;3)$, đường thẳng d có phương trình: 3x-5y+3=0. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

Cách 1: Chọn M(-1;0) thuộc d, M'=$T_{\vec{v}}$(M) =(-3;3). M' thuộc d'.Vì d'//d nên d' có phương trình 3x-5y+C=0. M' thuộc d'⇔C=24.

Vậy phương trình đường thẳng d' là:3x-5y+24=0.

Cách 2: Từ biểu thức toạ độ của $T_{\vec{v}}$ $\begin{cases} x' = x-2 \\ y' = y+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x'+2 \\ y = y'-3 \end{cases}$ thay vào phương trình của d ta được: 3x' -5y'+24=0.

Vậy phương trình đường thẳng d' là:3x-5y+24=0.

Cách 3: Lấy M,N bất kì thuộc d, tìm ảnh M',N' tương ứng của M và N qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$. Khi đó đường thẳng d' là đường thẳng M'N'.

Bài 2: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho M(1;5), đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-2x+4y-4=0$, đường thẳng d có phương trình x-2y+4=0.

a)Tìm ảnh của m,(C), d qua phép đối xứng trục Ox.

b)Tìm ảnh của M qua phép đối xứng trục d.

Giải: a)Gọi M',(C'),d' lần lượt là ảnh của M, (C), d qua phép đối xứng trục Ox.

Ta có M' (1;-5).

(C) có tâm I(1;-2), bán kính R=3. Đường tròn (C') có tâm là $I'=Đ_{Ox}(I)=(1;2)$ và bán kính R=3. Vậy phương trình (C) là: $(x-1)^2+(y-2)^2=9$.

Gọi N'(x';y') là ảnh của N(x;y) qua phép đối xứng trục Ox, ta có $\begin{cases} x'=x \\ y'=-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x' \\ y=-y' \end{cases}$. Thay vào phương trình của d ta được: x'+2y'+4=0.

Vậy phương trình của d' là x+2y+4=0.

b)Đường thẳng d_1 đi qua M và vuông góc với d có phương trình là: 2x+y-7=0.

Gọi M_0 là giao điểm của d và d_1 thì toạ độ của M_0 là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-2y+4=0 \\ 2x+y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

Vậy $M_0(2;3)$

Gọi M_1 là ảnh của M qua phép đối xứng trục d thì M_0 là trung điểm đoạn thẳng MM_1 nên $M_1(3;1)$

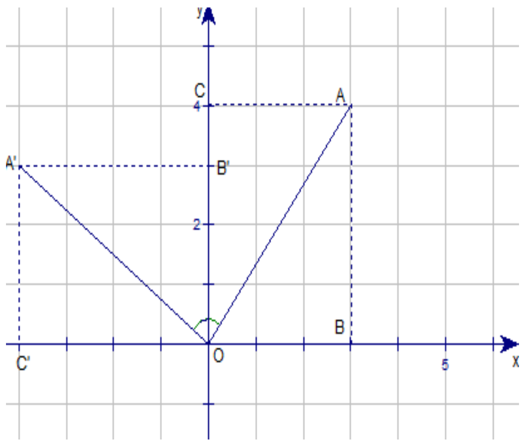
Bài 3: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho A(3;4).Hãy tìm toạ độ điểm A' là ảnh của A qua phép quay tâm O góc quay 90^0.

Giải:

Gọi B(3;0), C(0;4) lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các trục Ox,Oy.

Phép $Q_{(O,90^0)}$ biến hình chữ nhật OBAC thành hình chữ nhật OB'A'C'. Ta thấy B'(0;3), C'(-4;0)

=>A'(-4;3)



Bài 4 Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho đường thẳng d có phương trình:3x+2y-6=0.Hãy viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép vị tự tâm O tỉ số k=-2.

Giải:

Cách 1: $V_{(O,k)}(d)=d'$ =>d'//d => d' có phương trình:3x+2y+C=0. Lấy M(0;3) thuộc d.Gọi M'(x';y') là ảnh của M qua phép vị tự đã cho, ta có $\overrightarrow{OM'}=-2\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=0 \\ y'=-6 \end{cases}$

Vậy M'(0;-6), M' thuộc d' =>C=12.

Do đó phương trình d' là:3x+2y+12=0.

Cách2: Gọi M'(x';y') là ảnh của M(x;y) qua phép vị tự tamO tỉ số k=-2, ta có

$$\begin{cases} x' = -2x \\ y' = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}x' \\ y = -\frac{1}{2}y' \end{cases}$$

Điểm M thuộc d $\Leftrightarrow -\frac{3}{2}x - y' - 6 = 0 \Leftrightarrow 3x' + 2y' + 12 = 0$.

Vậy phương trình d' là:3x+2y+12=0.

Cách 3:
Lấy M,N bất kì trên d, tìm ảnh M',N' của M,N qua phép vị tự tâm O tỉ số k=-2. Khi đó d' là đường thẳng M'N'.

Bài 5: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho đường thẳng d có phương trình: x+y-2=0.Hãy viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm I(-1;-1), tỉ số k=$\frac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc quay -45^0.

Giải: Phép vị tự tâm I tỉ số k=$\frac{1}{2}$ biến d thành d_1 => $d//d_1$ =>d_1 có phương trình:x+y+C=0.

Lấy M(1;1) thuộc d, $V_{(I,\frac{1}{2})}$(M)=O, O thuộc d_1 => d_1 có phương trình:x+y=0.

$Q_{(O,-45^0)}(d_1)$=Oy. Vậy phương trình d' là: x=0.

Dạng 2: Dùng phép biến hình để giải một số bài toán dựng hình:

Phương pháp: Để dựng điểm M ta làm như sau:

Cách 1: Xác định M như ảnh của một điểm đã biết qua một phép biến hình.

Cách 2: Xem M như là giao điểm của một đường cố định với ảnh của một đường đã biết qua một phép biến hình.

Bài1: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho A(-1;-1),B(3;1),C(2;3). Tìm toạ độ điểm D để tứ giác ABCD là hình bình hành.

Giải:

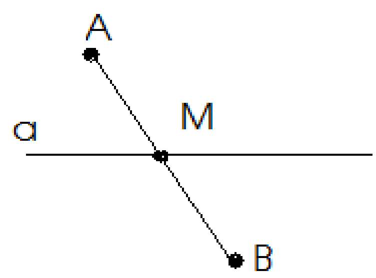
Giả sử điểm D(x;y). Ta có $T_{\overrightarrow{BA}}(D) = C$, mà $\overrightarrow{BA} = (-4;-2)$

Do đó: $\begin{cases} x = 2-4 \\ y = 3-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$. Vậy D(-2;1).

Bài 2: Hai thôn nằm ở vị trí A, B cách nhau một con sông(Xem hai bờ sông là hai đường thẳng song song). Người ta dự định xây một chiếc cầu MN bắc qua sông(cầu vuông góc với bờ sông) và làm hai đoạn đường AM, NB(như hình vẽ). Hãy xác định vị trí chiếc cầu MN sao cho AM+NB ngắn nhất.

Giải:

Trường hợp 1: Coi con sông rất hẹp. Bài toán trở thành: Cho hai điểm A,B nằm ở hai phía khác nhau so với đường thẳng a. Tìm vị trí M trên A để AM+AN nhỏ nhất. Khi đó M là giao điểm của AB với a.



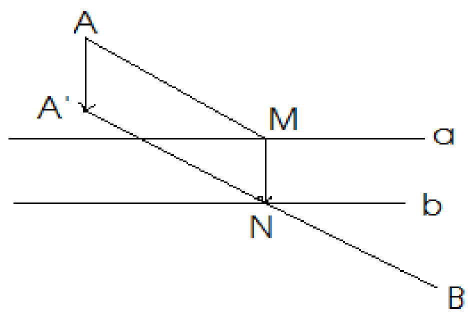
Trường hợp 2: a//b

Nhận xét: a,b cố định => $\overrightarrow{MN}$ cố định.

$T_{\overrightarrow{MN}}$(A) =A' =>A'N = AM.

Ta có AM+BN = A'N+NB =A'B

Cách dựng: Dựng A'=$T_{\overrightarrow{MN}}$(A). Nối A' với B cắt b tại N. Từ N hạ đường thẳng vuông góc với a tại M. Khi đó MN là vị trí xây cầu.



Bài 3: Cho hai điểm A,B nằm về một phía của đường thẳng d. Hãy xác định điểm M trên d sao cho AM+MB bé nhất.

Giải:

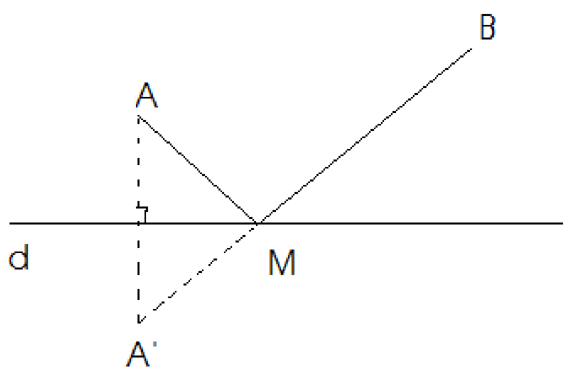
Nhận xét: Gọi A'= $Đ_d$(A) =>AM=AM'

Vậy: AM+MB =A'M+MB=A'B

Cách dựng:

Dựng A'= $Đ_d$(A)

Nối A' với B cắt d tại M, khi đó AM+MB nhỏ nhất.



Bài 4: Cho góc nhọn $\widehat{xOy}$, điểm A nằm trong góc đó. Hãy xác định điểm B trên Ox, điểm C trên Oy sao cho tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất.

Giải:

Nhận xét: Gọi A’ = $Đ_{Ox}$(A), A”=$Đ_{Oy}$(A)

=>A’B=AB, A”C=AC

=>AB+BC+CA=A’B+BC+A”C=AA”

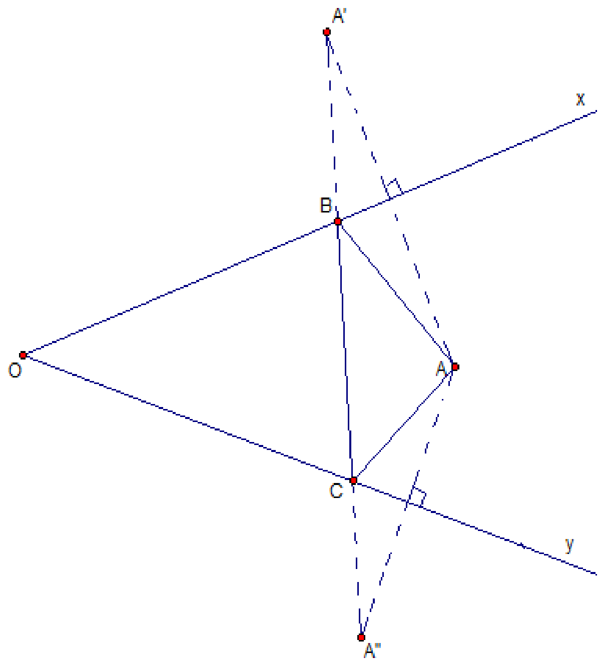
(nhỏ nhất)

Dựng:

A’ = $Đ_{Ox}$(A)

A”=$Đ_{Oy}$(A)

Nối A’ với A”, AA” cắt Ox và Oy lần lượt tại B và C. Khi đó chu vi tam giác ABC nhỏ nhất.



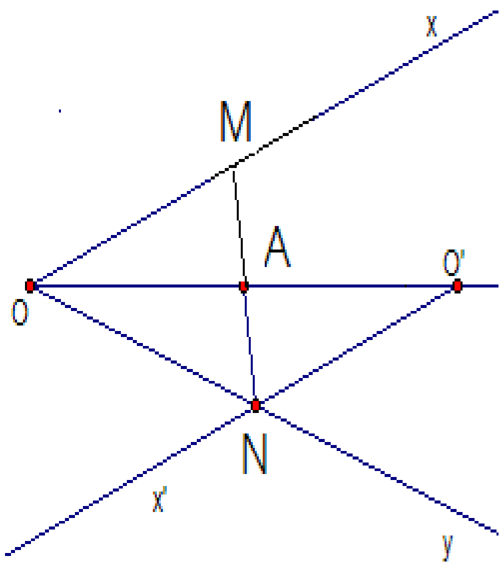
Bài 5: Cho góc nhọn $\widehat{xOy}$, điểm A thuộc miền trong của góc đó. Hãy tìm một đường thẳng đi qua A, cắt Ox, Oy lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của MN.

Giải:

Giả sử đã dựng được hai điểm M,N thoả mãn yêu cầu của bài toán. Khi đó N=$Đ_A$(M). Gọi O’x’ = $Đ_A$(Ox), ta có N là giao điểm của O’x và Oy. Từ đó ta có cách dựng:

Dựng O’x’ = $Đ_A$(Ox), gọi N là giao điểm của O’x và Oy, M=$Đ_A$(N).Khi đó M,N là hai điểm cần tìm.

Theo cách dựng trên cặp điểm M,N là duy nhất

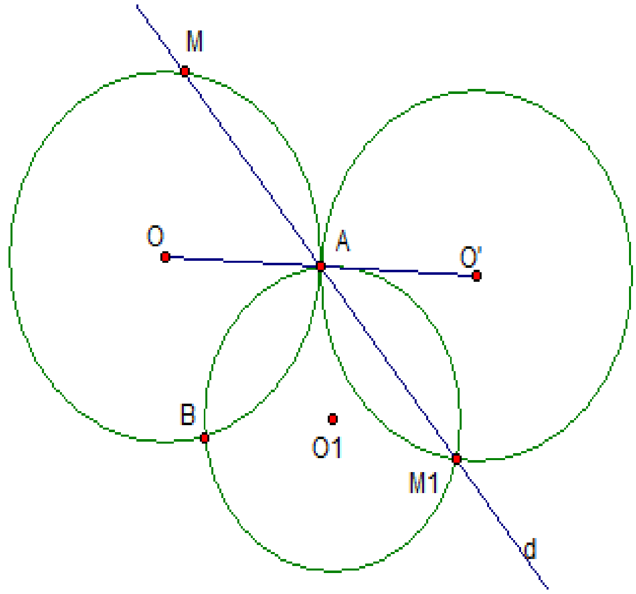


Bài 6:

Cho đường tròn (O;R) và (O_1;R_1) cắt nhau tại A và B. Hãy dựng đường thẳng d đi qua A và cắt (O;R) và (O_1;R_1) lần lượt tại M và M_1 sao cho A là trung điểm của MM_1

Giải:

Giả sử đã dựng được đường thẳng d thoả mãn điều kiện đề bài. Khi đó ta có M_1=$Đ_A$(M). Gọi đường tròn (O',R) là ảnh của đường tròn (O,R) qua phép đối xứng tâm A. Ta có M_1 là giao điểm của (O';R) với đường tròn (O_1,R_1).



Cách dựng:

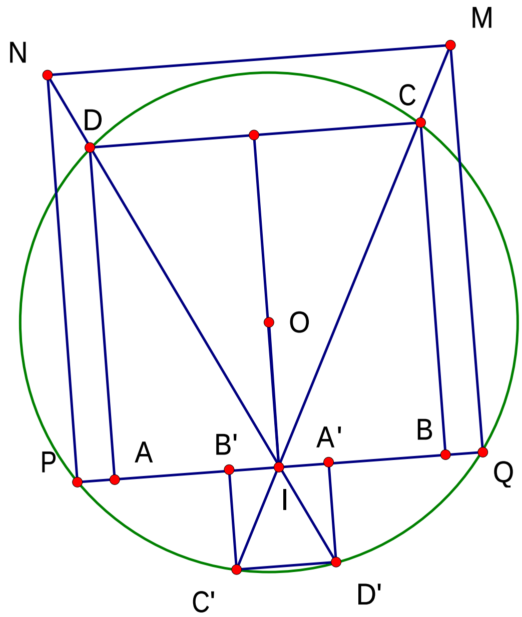
Dựng đường tròn (O',R) là ảnh của đường tròn (O,R) qua phép đối xứng tâm A.Gọi M_1 là giao điểm của (O';R) với đường tròn (O_1,R_1) không trùng với A, M=$Đ_A$(M_1). đường thẳng d là đường thẳng MM_1.

Theo cách dựng trên có một đường thẳng d thoả mãn điều kiện đề bài.

Bài 7: Cho đường tròn (O) với dây cung PQ. Dựng hình vuông ABCD có hai đỉnh A,B nằm trên đường thẳng PQ và hai đỉnh C,D nằm trên đường tròn.

Giải:

Giả sử đã dựng được hình vuông ABCD thoả mãn điều kiện của bài toán. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng PQ thì OI là đường trung trực của PQ nên cũng là đường trung trực của DC và do đó cũng là đường trung trực của AB. Từ đó suy ra, nếu dựng hình vuông PQMN thì có phép vị tự tâm I biến hình vuông PQMN thành hình vuông ABCD.



Cách dựng:

Dựng hình vuông PQMN. Lấy giao điểm C và C' của đường thẳng IM và đường tròn, lấy giao điểm D và D' của IN và đường tròn(ta kí hiệu sao cho hai điểm C, D nằm về một phía đối với đường thẳng PQ). Gọi các điểm B,A,B',A' lần lượt là hình chiếu của các điểm C,D,C',D' trên đường thẳng PQ. Ta được các hình vuông ABCD và A'B'C'D' thoả mãn điều kiện của bài toán.

Dạng3:

Dùng phép biến hình để giải một số bài toán tìm tập hợp điểm.

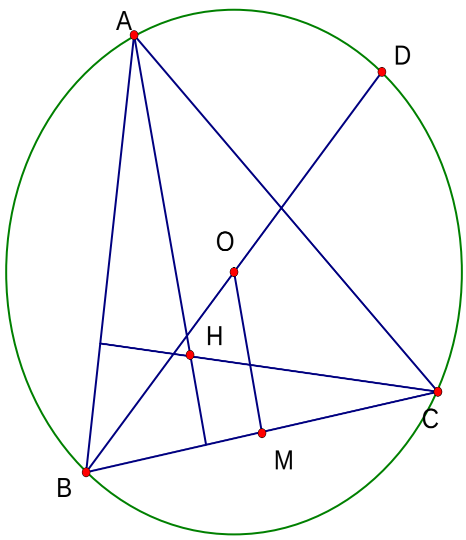
<u>Phương pháp</u>: Chứng minh tập hợp điểm cần tìm là ảnh của một hình đã biết qua một phép biến hình.

Bài 1:

Cho hai điểm phân biệt B,C cố định (BC không phải là đường kính) trên đường tròn (O), điểm A di động trên (O). Chứng minh rằng khi A di động trên (O) thì trực tâm tam giác ABC di động trên một đường tròn.

<u>Giải:</u>

Cách1:



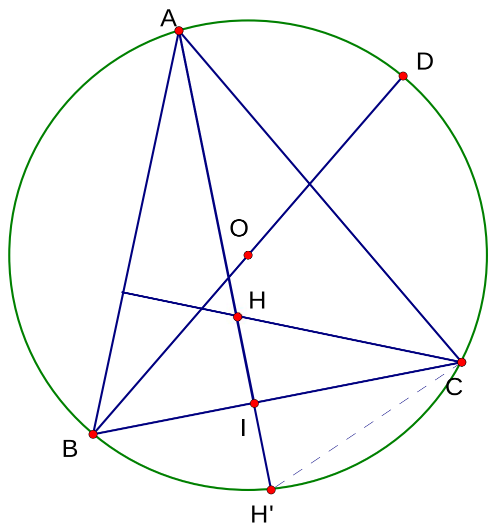
Gọi H là trực tâm tam giác ABC, M là trung điểm của BC. Tia BO cắt đường tròn (O) tại D . Ta có $\widehat{BCD}=90^0$ nên DC//AH, AD//CH => tứ giác ADCH là hình bình hành => $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{OM}$.

Vì $\overrightarrow{OM}$ không đổi => $T_{2\overrightarrow{OM}}$ (A) =H.

Vậy khi A di chuyển trên đường tròn (O) thì H di chuyển trên đường tròn (O') là ảnh của (O) qua phép tịnh tiến theo $2\overrightarrow{OM}$

Cách 2:

Gọi H là trực tâm tam giác ABC



Gọi I, H’ lần lượt là giao điểm của tia AH với đoạn thẳng BC vả đường tròn (O). Ta có:

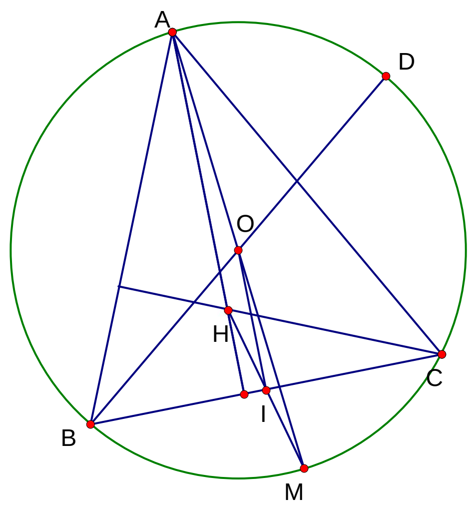
$\widehat{BAH} = \widehat{HCB}$; $\widehat{BAH} = \widehat{BCH'}$

Do đó tam giác HCH’ cân tại C => H và H’ đối xứng nhau qua BC.

Khi A chạy trên đường trong (O) thì H’ cũng chạy trên đường tròn (O) => khi A di động trên (O) thì trực tâm tam giác ABC di động trên một đường tròn là ảnh của (O) qua phép đối xứng trục BC.

Cách 3:

Gọi H là trực tâm tam giác ABC, I là trung điểm của BC. Tia AO và BO cắt (O) lần lượt tại M và D. Theo chứng minh trong cách 1ta có $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{OI}$.



Trong tam giác AHM có OI//AH và OI = $\frac{1}{2}$AH => OI là đường trung bình của tam giác AHM => I là trung điểm của HM => H và M đối xứng nhau qua I. Vì BC cố định nên I cố định.

Khi A di động trên (O) thì M di chuyển trên (O). Do đó khi A di động trên (O) thì trực tâm tam giác ABC di động trên một đường tròn (O’) là ảnh của (O) qua phép đối xứng tâm I.

Bài 2:

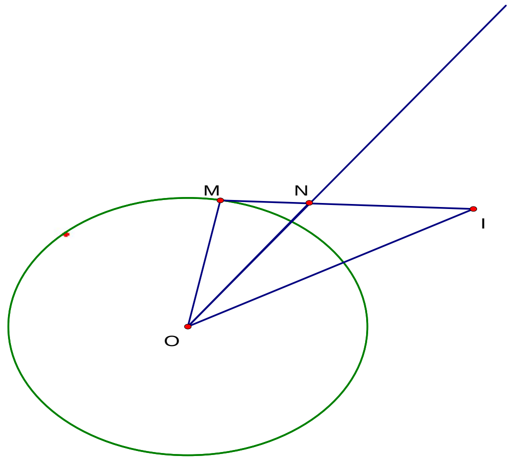
Cho đường tròn (O;R), I cố định khác O. Một điểm M thay đổi trên (O). Tia phân giác của góc MOI cắt IM tại N. Tìm quỹ điểm N.

Giải:

Vì ON là tia phân giác của góc $\widehat{MOI}$ nên $\frac{MN}{NI}=\frac{OM}{OI}$ hay $\frac{IM-IN}{IN}=\frac{OM}{OI}$ vì (O), I cố định nên $\frac{OM}{OI}$ =k(k là hằng số, k $\neq$ 0)

$$\Rightarrow \frac{IM-IN}{IN}=k \Leftrightarrow IN=\frac{1}{k+1}IM \Rightarrow \overrightarrow{IN}=\frac{1}{k+1}\overrightarrow{IM}$$

Vậy phép vị tự tâm I tỉ số $\frac{1}{k+1}$ biến điểm M thành điểm N.



Do đó khi M chạy trên đường tròn (O) thì N di động trên đường tròn (O') là ảnh của đường tròn (O) qua phép vị tự tâm I tỉ số $\frac{1}{k+1}$.

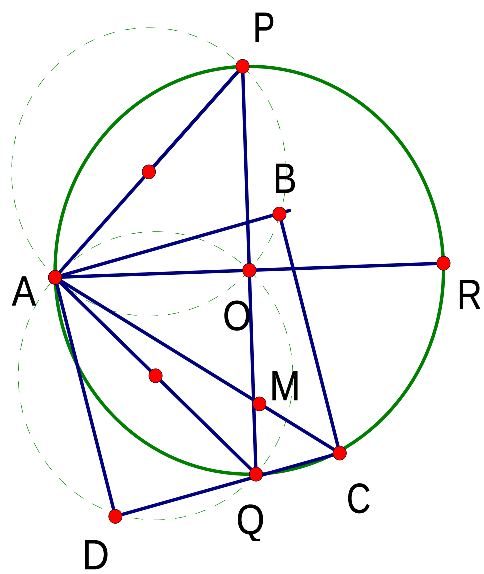
Bài 3: Cho điểm A cố định nằm trên đường tròn (O) và điểm C thay đổi trên đường tròn đó. Dựng hình vuông ABCD. Tìm quỹ tích điểm B và điểm D.

Giải:

Trên đoạn thẳng AC lấy điểm M sao cho AM=AB=AD. Khi đó, ta có: $\frac{AM}{AC}=\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ngoài ra; (AM,AB)=45^0 và (AM,AD)=-45^0.

Suy ra, phép vị tự V tâm A, tỉ số k=$\frac{\sqrt{2}}{2}$ biến điểm C thành điểm M và phép quay Q tâm A góc quay 45^0 biến điểm M thành điểm B. Vậy nếu gọi F là phép hợp thành của V và Q thì F biến C thành B. Vì quỹ tích của C là đường tròn (O), nên quỹ tích của B là ảnh của đường



tròn đó qua phép đồng dạng F. Đường tròn quỹ tích B có thể xác định như sau: Gọi AR là đường kính đường tròn (O) và PQ là đường kính của (O) vuông góc với AR (ta k hiệu các điểm P,Q sao cho (AR,AP)=45^0). Khi đó ta thấy phép đồng dạng F biến AR thàn AP. Vậy quỹ tích điểm B là đường tròn đường kính AP.

Tương tự ta có quỹ tích điểm D là đường tròn đường kính AQ.

Bài 5: Cho đường tròn (O) và một điểm P nằm trong đường tròn đó. Một đường thẳng thay đổi đi qua P, cắt (O) tại hai điểm A và B. Tìm quỹ tích điểm M sao cho: $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$.

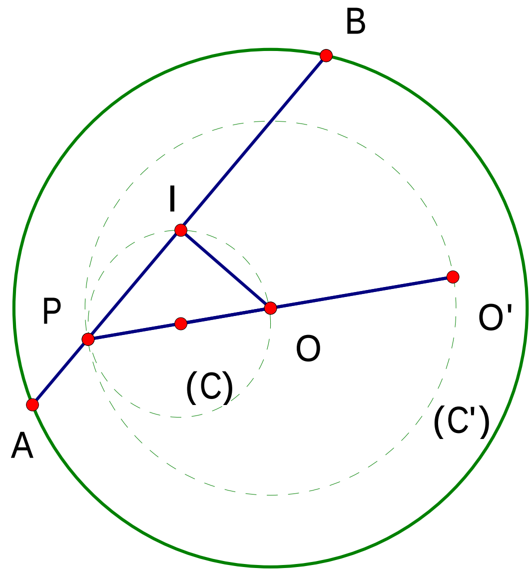
Giải:

Gọi I là trung điểm của AB thì $\overrightarrow{PI} = \dfrac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}}{2}$ .Bởi vậy $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PI}$.

Gọi V là phép vị tự tâm P tỉ số k=2 thì V biến điểm I thành điểm M.

Vì I là trung điểm của AB nên $OI \perp AB$. Suy ra quỹ tích của điểm I là đường tròn (C) đường kính PO.

Vậy quỹ tích của điểm M là đường tròn



(C’) là ảnh của (C) qua phép vị tự V. Nếu ta lấy O’ sao cho $\overrightarrow{PO'} = 2\overrightarrow{PO}$ thì (C’) là đường tròn đường kính PO’

……………………………………………………………………………………

Chúc các em ôn tập tốt và đạt kết quả cao trong kì thi sắp tới !