Đôi điều về câu IV-2 đề thi học kỳ 1 lớp 10 năm 2011-2012

Th.s. Phan Văn Vinh
Tổ toán, trường THPT Số 1 Quảng Trạch

Trong kỳ thi học kỳ 1 năm học 2011-2012 vừa qua của tỉnh Quảng Bình có xuất hiện một bài toán khá hay: "Giải phương trình $x^2+2-\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)}=0$ ". Bài toán này tuy không mới lạ nhưng nó cũng đã gây ra cho nhiều em học sinh sự lúng túng trong việc tìm ra con đường giải quyết bài toán. Thậm chí có những học sinh khá, giỏi cũng đành bất lực trước bài toán này.

Mới nhìn vào đề bài nhiều bạn định hướng bình phương. Tuy nhiên sau khi thực hiện một vài bước sẽ thấy rằng suy nghĩ đó hoàn toàn không phù hợp với bài toán.

Bây giờ ta sẽ phân tích để đi tới tìm ra lời giải cho bài toán. Để làm mất dấu căn bậc hai ta thường nghĩ ngay tới việc bình phương hai vế, tuy nhiên suy nghĩ này nhanh chóng bị phá sản. Bắt buộc ta phải tìm mối liên hệ của các đối tượng có mặt trong bài toán để tìm ra hướng giải quyết.

Mấu chốt của bài toán nằm ở chỗ $x^2+2=(x^2-x+1)+(x+1)$. Như vậy phương trình được viết lại

$$(x^2-x+1)+(x+1)-\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)}=0.$$

Đến đây ta có hai hướng để giải quyết bài toán:

Hướng 1. ĐKXĐ $x\geq -1$, đặt $u=\sqrt{x^2-x+1}$ và $v=\sqrt{x+1}$, phương trình trở thành $u^2+v^2-uv=0$

Hướng 2. ĐKXĐ $x\geq -1$. Vì $x^2-x+1\neq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ nên chia hai vế của phương trình cho x^2-x+1 ta được

$$\frac{x+1}{x^2-x+1}-\sqrt{\frac{x+1}{x^2-x+1}}+1=0.$$ Đặt

$$t=\sqrt{\frac{x+1}{x^2-x+1}}\geq 0$$ ta được $t^2-t+1=0$.

Nên nhớ rằng, khi giải bài toán bằng cách đặt ẩn phụ thì ta có thể tìm điều kiện thừa của ẩn phụ chứ không nhất thiết là điều kiện đúng của ẩn phụ. Như trong bài toán này ta tìm điều kiện thừa của ẩn phụ là $t\geq 0$. Nếu bắt buộc tìm điều kiện đúng của ẩn phụ thì bài toán này vượt ra ngoài kiến thức của lớp 10.

Nếu đề bài toán trên được cho dưới dạng $x^2+2-\sqrt{x^3-1}=0$ thì quá trình tìm mối liên hệ giữa các đối tượng trong bài toán trở nên khó khăn hơn nhiều. Trước hết ta phải phân tích được $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ và $x^2+2=(x+1)+(x^2-x+1)$, khi đó mới định hướng được cách giải quyết bài toán như trên. Qua đó để thấy rằng, cùng một bài toán nhưng hình thức để khác nhau sẽ cho ta độ khó của bài toán khác nhau.

Dựa vào hai cách giải trên ta có một số hướng tổng quát hóa bài toán như sau:

Hướng 1. Xuất phát từ phương trình $u^2+v^2-uv=0$ ta có thể tổng quát u và v. Cụ thể, ta có thể nâng số bậc của u và v lên. Ví dụ ta có các phương trình sau:

$a)$ $2x^2+x-2\sqrt{(x^2-1)(x^2+x+1)}=0$

$b)$ $x^3-x-2\sqrt{(x+1)(x^3-2x+1)}=0$

Dạng tổng quát cho trường hợp này là

$$Af(x)+Bg(x)+C\sqrt{f(x)g(x)}=0$$

Hướng 2. Nếu xuất phát từ phương trình $t^2-t+1=0$, ta có thể nâng bậc của phương trình này lên.

Ví dụ ta có phương trình sau:

$$\sqrt{(x+1)^3}-2(x+1)\sqrt{x^2-x+1}+2(x^2-x+1)\sqrt{x+1}$$
$$-(x^2-x+1)\sqrt{x^2-x+1}=0.$$

Trên đây là một vài suy nghĩ của cá nhân tôi về bài toán. Rất mong sự góp ý của quý độc giả.