SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

MỘT SỐ BÀI TOÁN CƠ BẢN CỦA HÌNH HỌC KHÔNG GIAN TRONG QUAN HỆ SONG SONG

I. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Trong 8 năm giảng dạy môn Toán, không nhiều nhưng cũng đủ để tôi nghiệm ra rằng : học sinh rất e ngại học môn ***hình học không gian,*** vì các em nghĩ rằng nó rất trừu tượng, thiếu tính thực tế khách quan. Chính vì thế mà có rất nhiều học sinh học yếu môn học này. Và tôi cũng gặp không ít khó khăn khi truyền đạt nội dung kiến thức. Vậy nên tôi nghiên cứu đề tài này nhằm tìm ra những phương pháp truyền đạt phù hợp với học sinh và cũng nhằm tháo gỡ những vướng mắc, khó khăn mà học sinh thường hay gặp phải với mong muốn nâng dần chất lượng giảng dạy Toán học nói chung và môn hình học không gian nói riêng.

II. NỘI DUNG ĐỀ TÀI

1. Một vài lưu ý khi giải toán.

Khi giải một bài toán về hình học không gian ngoài yêu cầu đọc kỹ đề bài, phân tích giả thiết bài toán, vẽ hình đúng ta còn phải chú ý đến nhiều yếu tố khác như: Có cần xác định thêm các yếu tố khác trên hình vẽ hay không? hình vẽ như thế có tốt chưa ? Có thể hiện được hết các yêu cầu của đề bài hay chưa ? Để giải quyết vấn đề này ta phải bắt đầu từ đâu ? Nội dung kiến thức nào liên quan đến vấn đề được đặt ra, trình bài như thế nào cho đúng đắn…..Ngoài ra chúng ta còn nắm vững hệ thống lý thuyết, phương pháp chứng minh cho từng dạng toán như: tìm giao điểm của đường thẳng với mặt phẳng, tìm giao tuyến của hai mặt phẳng, chứng minh hai đường thẳng song song……có được như thế mới giúp chúng ta giải quyết được nhiều bài toán mà không gặp phải khó khăn.

2. Nội dung chính.

Bài toán 1: Tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng(α).

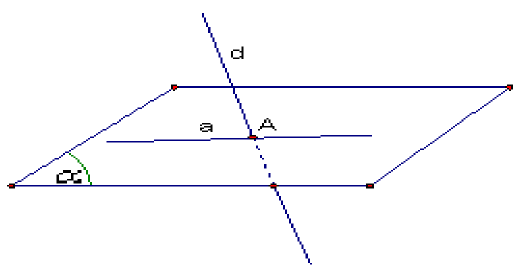
a) Phương pháp:

Muốn tìm giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (α) ta tìm giao điểm của đường thẳng d với một đường thẳng a nằm trên mp(α) (*hình 1*)

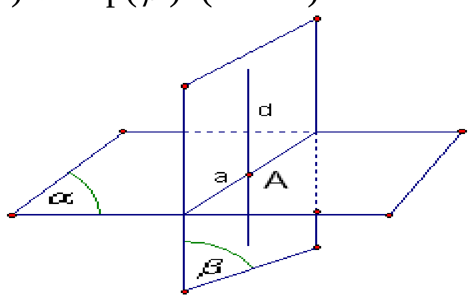
Tóm tắt: Nếu $\begin{cases} A \in d \\ A \in a \subset mp(\alpha) \end{cases}$ thì $A = d \cap mp(\alpha)$

**** Chú ý*** : Nếu đường thẳng a chưa có trên hình vẽ thì ta tìm a như sau

- Tìm mp(β) chứa d sao cho mp(β) cắt mp(α).
- Tìm giao tuyến a của hai mp(α) và mp(β) (*hình 2*)



Hình 1



Hình 2

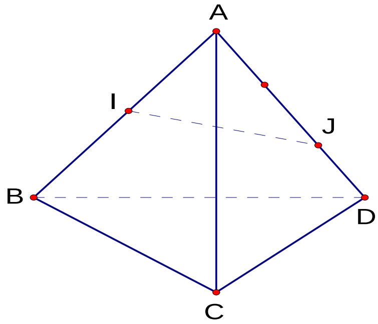
b) Bài tập áp dụng

<u>Bài 1</u>

Cho tứ diện ABCD. Gọi I là trung điểm của AB, J là một điểm trên AD sao cho $AJ=\frac{2}{3}AD$. Tìm giao điểm của đường thẳng IJ với mp(BCD).

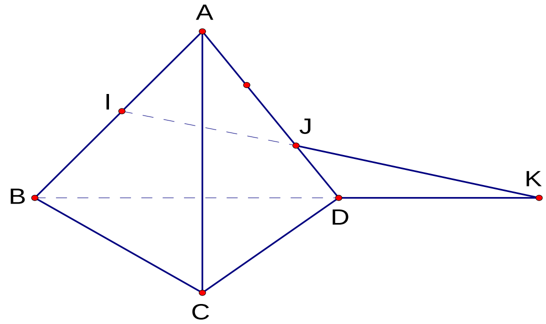
<u>Nhận xét:</u>

- Đường thẳng a cần tìm chính là đường thẳng BD.
- Điều kiện để hai đường thẳng phân biệt cắt nhau là hai đường thẳng đó phải cùng nằm trên một mặt phẳng và không song song.



Hình 3

$\longrightarrow$



Hình 4

<u>Lời giải:</u>

Từ giả thiết $\Rightarrow$ IJ và BD không song song.

Gọi $K = IJ \cap BD \Rightarrow \begin{cases} K \in IJ \\ K \in BD \subset (BCD) \end{cases}$

Kết luận: $K = IJ \cap (BCD)$ (*hình 4*)

<u>Bài 2</u>

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang đáy lớn AB. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA và SB, M là một điểm tùy ý thuộc đoạn SD.

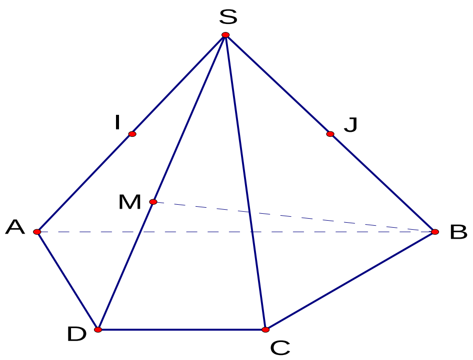
a) Tìm giao điểm của đường thẳng BM với mp(SAC).

b) Tìm giao điểm của đường thẳng IM với mp (SBC)

c) Tìm giao điểm của đường thẳng SC với mp(IJM).

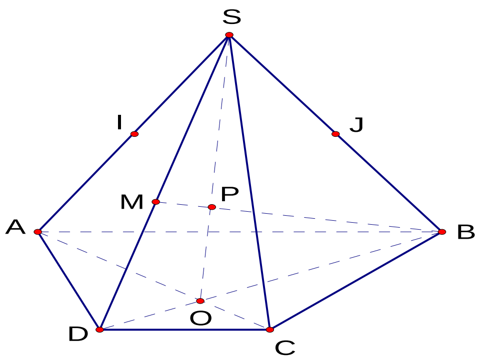
<u>Nhận xét</u>:

- Đường thẳng a nằm trên mp(SAC), không phải là đường thẳng SC.
- Chọn (SBD) chứa BM, tìm g/tuyến của (SBD) và (SAC) là SO.
- Kết luận giao điểm P của BM và SO là giao điểm cần tìm. (*hình 6*)



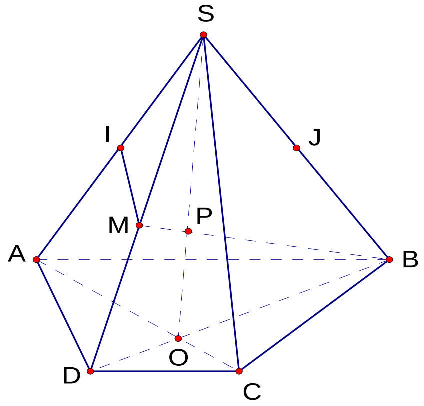
Hình 5

$\longrightarrow$



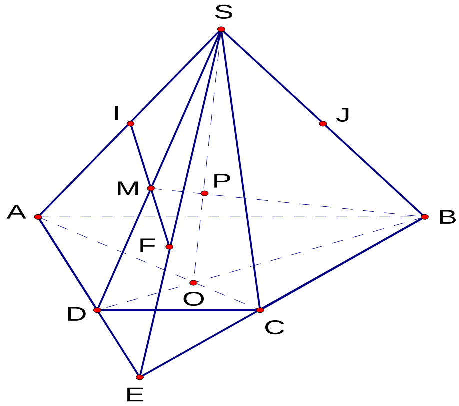
Hình 6

– Đường thẳng a nằm trên mp(SBC) là đường thẳng cắt IM.
– Xác định mp chứa IM và đi tìm giao tuyến của mp đó với mp(SBC).
– Từ đó tìm được giao tuyến là SE và giao điểm cần tìm chính là điểm F (*hình 8*).



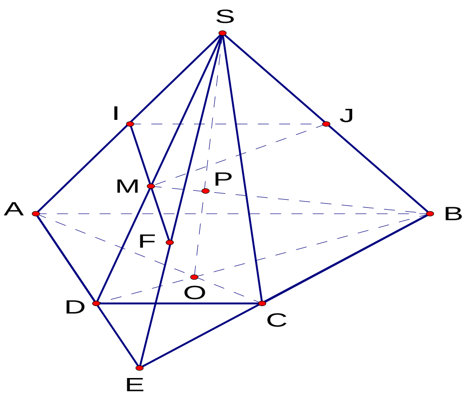
Hình 7

→



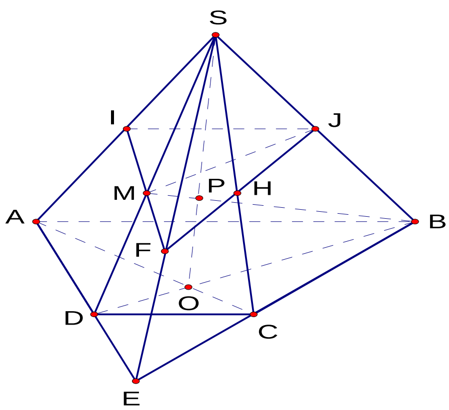
Hình 8

– Xác định mp chứa SC và đi tìm giao tuyến của mặt phẳng đó với mp(IJM).
– Có nhiều mặt phẳng chứa đường thẳng SC như mp(SAC), mp(SCD) và mp(SBC). Ta chọn mặt phẳng nào để tìm giao tuyến được thuận lợi



Hình 9

→



Hình 10

*** <u>Lời giải</u>**:

a) Ta có $BM \subset (SBD)$

Xét 2 mp(SAC) và (SBD) có S là điểm chung thức nhất.(1)
Gọi $O = AC \cap BD$ $\Rightarrow$ O là điểm chung thứ hai (2)
Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $SO = (SAC) \cap (SBD)$
Gọi $P = BM \cap SO$. Kết luận: $P = BM \cap (SAC)$

b) Ta có IM $\subset$(SAD)
Xét hai mp(SAD) và (SBC) có:
S là điểm chung thứ nhất
Gọi E = AD$\cap$BC $\Rightarrow$E là điểm chung thứ hai $\Rightarrow$SE = (SAD) $\cap$ (SBC)
Gọi F= IM $\cap$SE $\Rightarrow$F =IM $\cap$(SBC) ***(Hình 8)***
c) Ta có SC $\subset$(SBC)

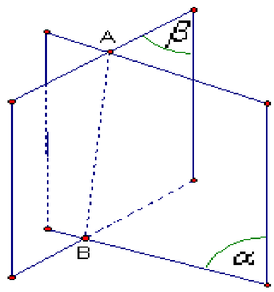
Xét 2 mp(IJM) và (SBC) . Ta có JF=(IJM) $\cap$(SBC)
Gọi H =JF $\cap$SC $\Rightarrow$H=SC$\cap$(IJM) ***(Hình 10)***

Bài toán 2: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) .

a) Phương pháp:

Cách 1 Xác định hai điểm chung của hai mp.

Tóm tắt: Nếu $\begin{cases} A\in(\alpha)\cap(\beta) \\ B\in(\alpha)\cap(\beta) \end{cases}$ thì AB=$(\alpha)\cap(\beta)$ ***(Hình 11)***



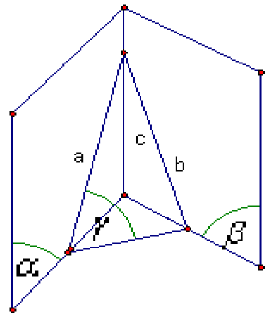
Hình 11

Cách 2 Xác định một điểm chung và phương của giao tuyến (song song với một đường thẳng cho trước)

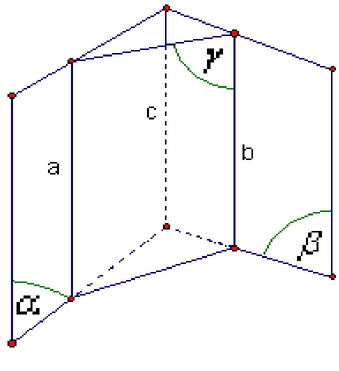
Dựa vào các định lý sau:

* Tính chất 2 (SGK trang 53) : Nếu $\begin{cases} (\alpha)\cap(\gamma)=a \\ (\beta)\cap(\gamma)=\text{b} \\ (\alpha)\cap(\beta)=\text{ c} \end{cases}$ thì a // b // c hoặc a, b, c đồng quy.

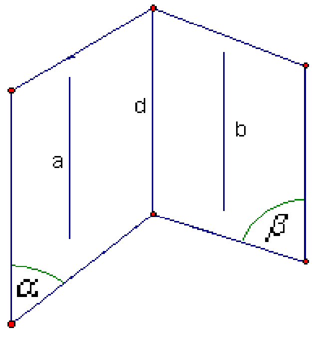
* Hệ quả: Nếu $\begin{cases} a//b \\ a\subset(\alpha),\text{b}\subset(\beta) \\ (\alpha)\cap(\beta)=\text{ d} \end{cases}$ thì d // a // b hoặc d trùng a hoặc d trùng với b



Hình 12



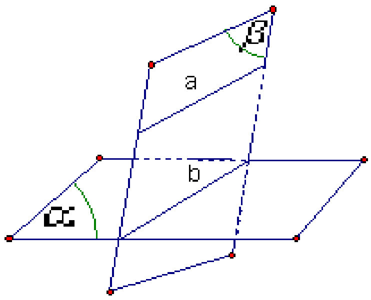
Hình 13



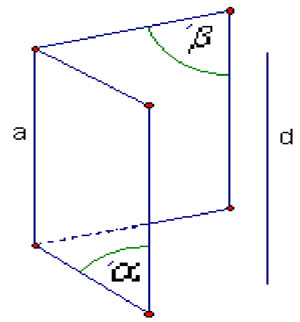
Hình 14

* Đlý 2:(SGK trang 57) Nếu $\begin{cases} a//(\alpha) \\ a \subset (\beta) \\ (\alpha)\cap(\beta) = b \end{cases}$ thì a//b (***hình 15***)

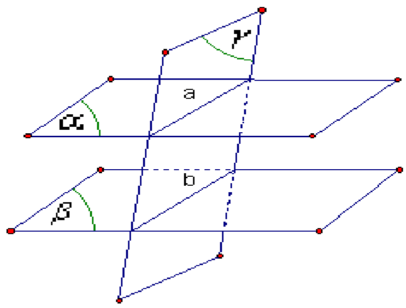
* Hệ quả: Nếu $\begin{cases} (\alpha)//d \\ (\beta)//d \\ (\alpha)\cap(\beta) = a \end{cases}$ thì a // d. (***hình 16***)



Hình 15



Hình 16



Hình 17

* Đlý 3 (Sgk trang 57). Nếu $\begin{cases} (\alpha)//(\beta) \\ (\gamma)\cap(\alpha) = a \end{cases}$ thì $\begin{cases} (\gamma)\cap(\beta) = b \\ a//b \end{cases}$ **(*hình 17*)**

b) Bài tập áp dụng

<u>Bài 3</u>

Trong mp(α) cho tứ giác ABCD có AB và CD cắt nhau tại E, AC và BD cắt nhau tại F. Gọi S là một điểm nằm ngoài mp(α). Tìm giao tuyến của các mp sau:

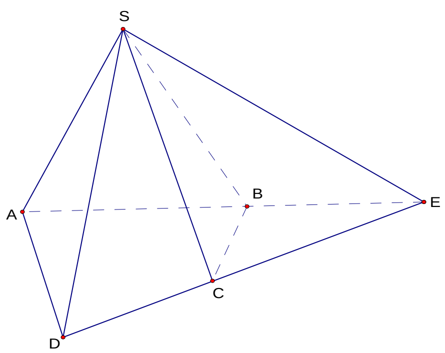
a) Mp (SAB) và mp(SCD)

b) Mp(SAC) và mp(SBD)

c) Mp(SEF) với hai mp(SAD) và (SBC).

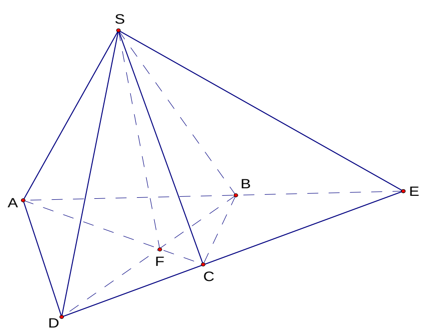
**** <u>Nhận xét</u>***:

– Hai mp(SAB) và mp(SCD) thì hai điểm chung lần lượt là S là E dựa vào hình vẽ (*hình 18*).
– Hai mp(SAC) và mp(SBD) thì giao tuyến là SF. (*hình 19*)



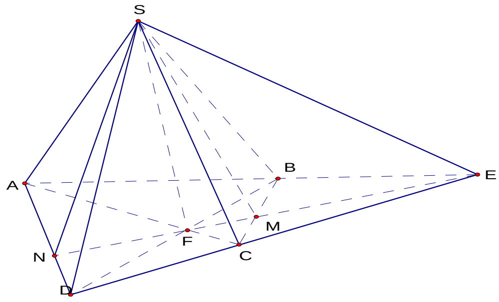
Hình 18

→



Hình 19

– Ta có điểm chung thứ hai là M, N bằng cách nối EF với BC và EF với AD. (***hình 20***)



Hình 20

*** Lời giải:**

a) Ta có $S \in (SAB) \cap (SCD)$ (1). $E = AB \cap CD \Rightarrow E \in (SAB) \cap (SCD)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SE = (SAB) \cap (SCD)$

b) Ta có $S \in (SAC) \cap (SBD)$ (*). $F = AC \cap BD \Rightarrow F \in (SAC) \cap (SBD)$ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow SF = (SAC) \cap (SBD)$

c) Gọi $M = BC \cap \mathrm{EF}$, $N = AD \cap \mathrm{EF}$

Xét hai mp(SAD) và (SEF) có: $S \in (SAD) \cap (SEF)$; $N \in (SAD) \cap (SEF)$

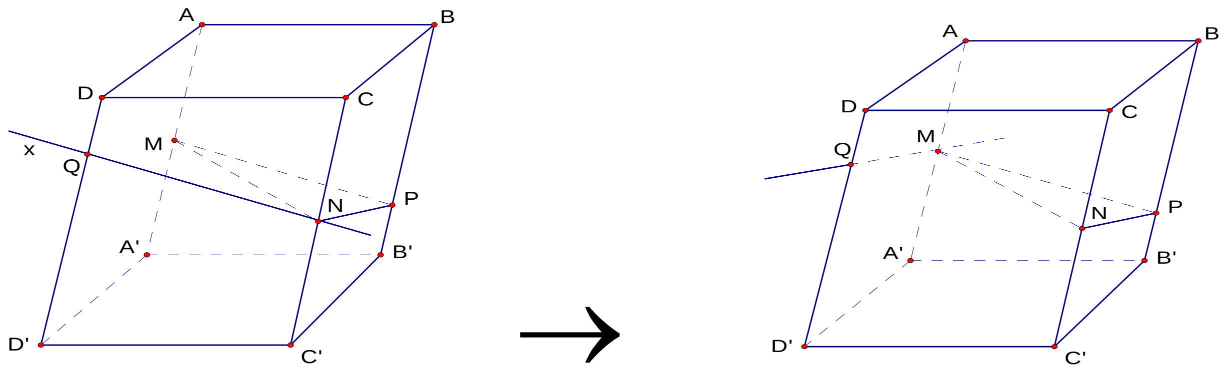
Kết luận : $SN = (SAD) \cap (SEF)$. Tương tự: $SM = (SBC) \cap (SEF)$

Bài 4

Cho hình hộp ABCD.A’B’C’D’. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA’ và CC’, P là một điểm thuộc đoạn BB’. Tìm giao điểm Q của đường thẳng DD’ với mp(MNP) .

Nhận xét:

– Để tìm giao điểm Q của đường thẳng DD’ với mp(MNP) thì ta phải tìm giao tuyến của mặt phẳng chứa đường thẳng DD’ với mp(MNP). Phải biết đường thẳng DD’ nằm trên những mặt phẳng nào và cho biết số điểm chung của các mặt phẳng đó với mp(MNP)?



Hình 21 *Hình 22*

Lời giải:

Ta có DD’ $\subset$(CC’D’D)

Xét 2 mp(MNP) và mp(CC’D’D) ta có:

N là một điểm chung (1)

MP //(mp(CC’D’D) (2)

MP $\subset$mp(MNP) (3)

Từ (1), (2) và (3)$\Rightarrow$ (MNP) $\cap$(CC’D’D) = N_x // MP

Gọi Q = DD’ $\cap N_x \Rightarrow$ Q = DD’ $\cap$ (MNP) (***hình 21***)

* Chú ý: Ta có thể chọn mp(AA’D’D) chứa DD’ và tìm được giao tuyến của 2 mp(MNP) và mp(AA’D’D) là M_y song song với đường thẳng NP (***hình 22***)

Bài 5

Cho hình chóp S.ABCD. Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên hai cạnh AB và CD, (α) là mặt phẳng chứa MN và song song với SA.

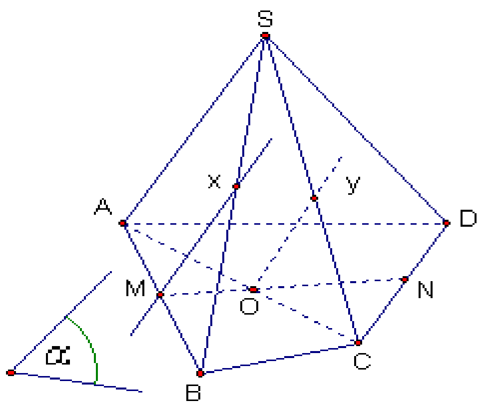
a) Tìm giao tuyến của mp(α) với các mp(SAB) và mp(SAC).

b) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mp(α)

Nhận xét:

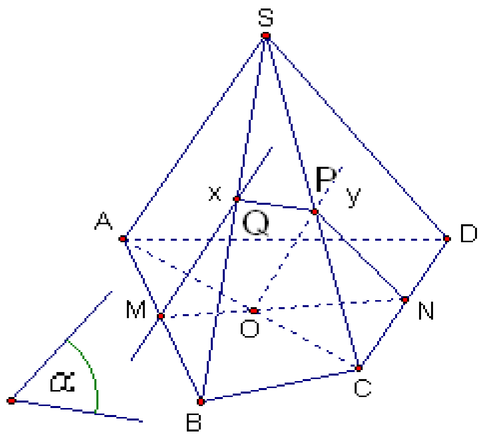
- Để tìm (α) cần tìm 1 điểm (α) nữa ngoài 2 điểm M và N .
- Từ đó tìm giao tuyến của (α) với (SAB), (SAC) và thiết diện của hình chóp với mp(α)

Lời giải:



Hình 23

→



Hình 24

a) Xét 2 mp(SAB) và (α) có:

M là điểm chung

Mặt khác: SA // mp(α); SA $\subset$ mp(SAB)

$\Rightarrow$ (SAB) $\cap$ (α)= M_x // SA

Xét 2 mp(SAC) và mp() :

Gọi O = MN$\cap$ AC; O là điểm chung của hai mp

Mặt khác: SA // mp(α); SA $\subset$ mp(SAB)

$\Rightarrow$ (SAC) $\cap$ (α)= O_y // SA *(hình 23*)

b) Gọi Q = $M_x \cap$SB , P = $O_y \cap$SC

Ta có (α)$\cap$ (ABCD) =MN; (α)$\cap$ (SAB) = MQ

(α)$\cap$ (SBC) = PQ; (α)$\cap$ (SCD) = NP

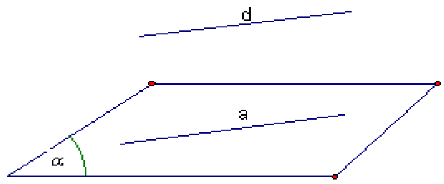
Kết luận: Thiết diện là tứ giác MNPQ. (*hình 24*)

Bài toán 3: Chứng minh đường thẳng d song song với mặt phẳng (α).

a) Phương pháp:

– Đlý 1 SGK trang 61

Tóm tắt: Nếu $\begin{cases} d \not\subset (\alpha) \\ d \,//\, a \\ a \subset (\alpha) \end{cases}$ thì d // (α)



Hình 25

– Nếu $\begin{cases} (P)//(Q) \\ d//(P) \end{cases} \Rightarrow d//(Q)$

– ....

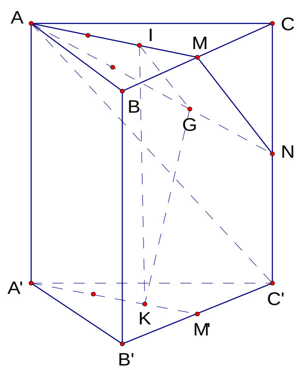
b) Bài tập áp dụng

Bài 6

Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi I, K, G lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, A'B'C' và ACC'. Chứng minh đường thẳng IG song song với mp(BB'C'C).

**** Nhận xét***:

– Phải c/m đường thẳng IG song song với MN nằm trên (BB'C'C).



Hình 26

**** Lời giải***:

Ta có: I là trọng tâm tam giác ABC nên $\frac{AI}{AM} = \frac{2}{3}$ (1)

G là trọng tâm tam giác ACC' nên $\frac{AG}{AN} = \frac{2}{3}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AI}{AM} = \frac{AG}{AN}$

Theo định lý talet đảo $\Rightarrow IG // MN \subset (BB'C'C)$

Kết luận: IG // (BB'C'C)

Bài 7

Cho 2 hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng

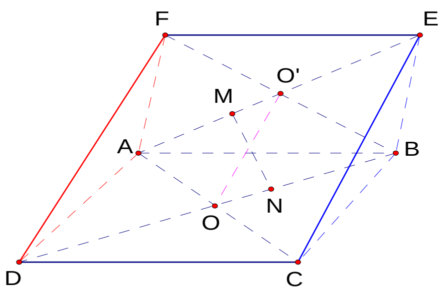
a) Gọi O , O' lần lượt là tâm của ABCD và ABEF. Chứng minh OO' song song với hai mp(ADF) và mp(BCE).

b) Gọi M, N là hai điểm lần lượt trên hai cạnh AE và BD sao cho $AM = \frac{1}{3}AE$, $BN = \frac{1}{3}BD$. Chứng minh MN song song với mp(CDFE).

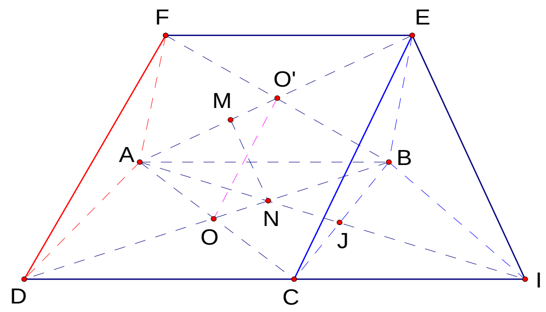
*** Nhận xét** :

- Đường thẳng a cần tìm là DF đối với mp(ADF), là CE đối với (BCE).
- Tìm giao tuyến của (AMN) và (CDFE). Có nhận xét gì về vị trí tương đối giữa đường thẳng MN và đường giao tuyến mới vừa tìm được.

*** Lời giải**:



Hình 27



Hình 28

a)CM OO'// (ADF) và OO'//(BCE)

Ta có: OO' đường trung bình của tam giác BDF và tam giác ACE

$\Rightarrow$ OO'//DF và OO' // CE

Mà $DF \subset (ADF)$, $CE \subset (BCE)$

Kết luận: OO' // (ADF), OO' // (BCE).

b) CM MN // (CDFE) .

* Tìm giao tuyến của hai mp(AMN) và (CDFE).

Ta có: E là điểm chung thứ nhất của hai mp.(1)

Gọi I là giao điểm của AN và CD$\Rightarrow$I là điểm chung thứ hai của hai mp (2)

Từ (1) và (2) suy ra EI là giao tuyến của hai mp(AMN) và (CDFE).

* CM MN // (CDFE)

Ta có: $AM = \frac{1}{3}AE$ (*).

Xét tam giác ABC có: $BN = \frac{1}{3}BD = \frac{2}{3}BO$ và BO là trung tuyến

$\Rightarrow$N là trọng tâm của tam giác ABC

Gọi J là giao điểm của AI và BC $\Rightarrow$J cũng là trung điểm của AI

$\Rightarrow\ AN = \frac{2}{3}\text{AJ} = \frac{1}{3}AI$ (**)

Từ (*) và (**)⇒ MN // CE ; Mà $CE \subset (BCFE)$

Kết luận : MN // (CDFE) (đpcm)

Bài toán 4: Chứng minh hai mp(α) và mp(β) song song.

a)Phương pháp:

– Đlý 1 (SGK trang 61)

Tóm tắt: Nếu $\begin{cases} a,b \subset (\alpha) \\ a \cap b = I \\ a//(\beta), b//(\beta) \end{cases}$ thì mp(α) // mp(β).

– Hệ quả 2(SGK trang 62)

$\begin{cases} (P)//(R) \\ (Q)//(R) \end{cases} \Rightarrow (P)//(Q)$

– Nếu $\begin{cases} a,b \subset (P); \quad a',b' \subset (Q) \\ a \cap b = I; \quad a' \cap b' = J \\ a//a', b//b' \end{cases} \Rightarrow (P)//(Q)$

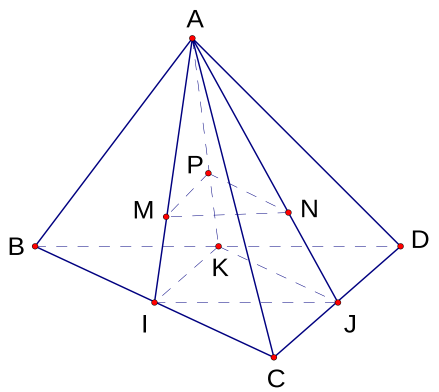
b) Bài tập áp dụng

<u>Bài 8</u>

Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC , ACD và ABD. Chứng minh hai mp(MNP) và mp(BCD) song song.

<u>Nhận xét:</u>

– Lưu ý cách xác định trong tâm dựa vào tính chất không nên vẽ quá nhiều các đường trung tuyến.



Hình 29

*** <u>Lời giải</u>***:

Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, CD và BD.

Ta có: $\frac{AM}{AI}=\frac{AN}{AJ}=\frac{2}{3}\Rightarrow MN // IJ$

Mà IJ $\subset$(BCD) $\Rightarrow$MN// (BCD) (1)

Tương tự MP // (BCD) (2)

Mà MN, MP $\subset$ (MNP) (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow$(MNP) // (BCD)

Bài 9

Cho hai hình vuông ABCD và ABEF nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho AM = BN. Qua M, N dựng các đường thẳng song song với AB lần lượt cắt AD và AF tại M'và N'.

a) Chứng minh mp(ADF) // mp(BCF).

b) Chứng minh mp(DEF) // mp(MM'N'N).

**** Nhận xét***:

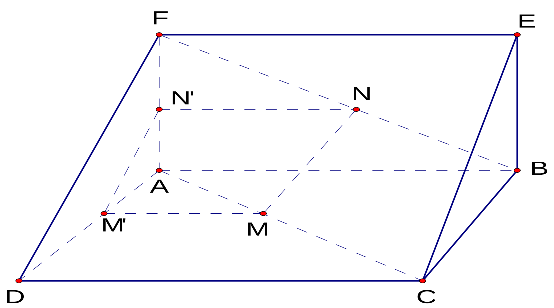
- Ta thấy hai đường thẳng AC và BF là bằng nhau,
- C/m MM' và M'N" song song với mp (DEF) dựa vào định lý talét đảo.

**** Lời giải***:

a) Ta có AF // BE $\subset$mp(BCE); AD // BC $\subset$mp (BCE)

Mà AF, AD $\subset$mp(ADF)

Kết luận mp(ADF) // mp(BCE).



Hình 30

b) Ta có MM' // AB

Mà AB // EF $\Rightarrow$ MM' // EF $\subset$ mp(DEF) (1)

Mặt khác MM' // CD $\Rightarrow \frac{AM'}{AD}=\frac{AM}{AC}$(*)

NN' // AB $\Rightarrow \frac{AN'}{AF}=\frac{BN}{BF}$ (**)

Mà AM = BN, AC = BF $\Rightarrow \frac{AM}{AC}=\frac{BN}{BF}$(***)

Từ (*), (**) và (***)$\Rightarrow \frac{AM'}{AD}=\frac{AN'}{AF}\Rightarrow$M'N' // DE $\subset$ mp(DEF) (2)

Mà MM', M'N' $\subset$ mp(MM'N'N) (3)

Từ (1) , (2), (3) $\Rightarrow$(DEF) //(MM'N'N) (đpcm)

3. KẾT LUẬN

Qua nhiều năm giảng dạy và đúc kết kinh nghiệm tôi nhận thấy rằng để dạy cho học sinh học tốt môn hình học không gian thì cần phải giúp cho học sinh nắm vững hệ thống lý thuyết các định nghĩa, định lý, hệ quả các phương pháp chứng minh. Ngoài ra cần giúp cho học sinh biết cách tư duy hình ảnh, kỹ năng vẽ hình biễu diễn. Nắm vững các yếu tố trên sẽ giúp cho việc giảng dạy của giáo viên được thuận lợi, hoc sinh tiếp thu kiến thức ngày một tốt hơn.

DANH MỤC CÁC TÀI LIỆU THAM KHẢO.

1. Trần Văn Hạo: *Học tốt hình học 11*- Nhà xuất bản Đại học Quốc gia TP. HCM, năm 2007

2. Trần Đức Huy: *Giải bài tập hình học 11*- Nhà xuất bản Đà Nẵng, năm 2001

3. Nguyễn Mộng Hy: *Bài tập hình học 11*- Nhà xuất bản giáo dục, năm 2007

4. Nguyễn Cam- Nguyễn Văn Phước- Nguyễn Hoàng Nguyên- *Tuyển chọn 400 bài tập tự luận và trắc nghiệm*- Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, năm 2007.

5. Trần Quang Nghĩa – Nguyễn Anh Trường: *Phương pháp giải toán hình không gian 11*- Nhà xuất bản Đà Nẵng, năm 1997