MỘT SỐ SAI LẦM KHI TÍNH NGUYÊN HÀM ,TÍCH PHÂN

Giáo viên : Phan Thị Thúy Hằng
(Tổ Toán)

Trong quá trình giải toán học sinh thường mắc phải một số sai lầm liên quan đến sự hiểu biết không đúng các khái niệm và vận dụng sai các định lí , quy tắc. Dưới đây là một số ví dụ về một số sai lầm thường gặp khi học sinh giải toán nguyên hàm , tích phân. Lời giải đúng ở dưới đây có thể không phải là lời giải tốt nhất mà lời giải đó muốn chỉnh lí việc biến đổi dẫn đến sai lầm.

***Ví dụ** 1*: Chứng minh : $F(x) = -(1+x).e^{-x}$ là một nguyên hàm của $f(x) = x.e^{-x}$. Từ đó tìm nguyên hàm của $g(x)=(x-1).e^{-x}$.

Lời giải có sai lầm:

$F'(x) = -e^{-x}+(1+x)e^{-x}=x.e^{-x}=f(x) \Rightarrow F(x)$ là một nguyên hàm của f(x).

Ta có $\int g(x).dx = \int (x-1).e^{-x}.dx = \int xe^{-x}.dx - \int e^{-x}.dx$

$= -(1+x)e^{-x}+C - (-e^{-x}+C) = -(1+x)e^{-x}+e^{-x} = -x.e^{-x}$

Sai lầm ở ví dụ trên là:

Khi tính nguyên hàm I có tách thành tổng của các nguyên hàm như I=I’ + I”, trong quá trình tính I’ và I” đều dùng hằng số C cho hai nguyên hàm nên dẫn đến kết quả sai.

Lời giải đúng là:

Ta có $\int g(x).dx = \int (x-1).e^{-x}.dx = \int xe^{-x}.dx - \int e^{-x}.dx$

$= -(1+x)e^{-x}+C' - (-e^{-x}+C'') = -(1+x)e^{-x}+e^{-x}+C' - C''$

$= -x.e^{-x} + C$ (với $C' - C'' = C$)

Ví dụ 2: Tính $I = \int_{-2}^{0} (x+1)^2.dx$

Lời giải có sai lầm:

Đặt $u = (x+1)^2 \Rightarrow du = 2(x+1)dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2\sqrt{u}}.du$

Đổi cận : với x = - 2 thì u = 1 ; x = 0 thì u = 1

Do đó: $I = \int_{-2}^{0} (x+1)^2.dx = \int_{1}^{1} \frac{u}{2\sqrt{u}}.du = \int_{1}^{1} \frac{\sqrt{u}}{2}.du = 0$

Sai lầm ở ví dụ trên là:

$u = (x+1)^2$ không phải là hàm số đơn điệu trên $[-2;0]$ nên không thể đổi biến , đổi cận như trên được. Nếu muốn đổi biến thì phải viết tích phân cần tính thành tổng của hai tích phân mà $u = (x+1)^2$ đơn điệu. Lời giải trên còn sai lầm khi viết $dx = \frac{1}{2\sqrt{u}}.du$,như vậy đã từ $u = (x+1)^2$ suy ra $x + 1 = \sqrt{u}$, điều này chỉ được viết khi $x \geq -1$.

Lời giải đúng là:

$$I = \int_{-2}^{0} (x+1)^2.dx = \int_{-2}^{-1} (x+1)^2.dx + \int_{-1}^{0} (x+1)^2.dx$$

Xét I’ = $\int_{-2}^{-1}$ $(x+1)^2.dx$

Đặt u = $(x+1)^2$ $\Rightarrow$ du = 2(x+1)dx $\Rightarrow$ dx = - $\frac{1}{2\sqrt{u}}$.du

Đổi cận : với x = - 2 thì u = 1 ; x = - 1 thì u = 0

Do đó I’= - $\int_{1}^{0} \frac{u}{2\sqrt{u}}.du = \int_{0}^{1} \frac{\sqrt{u}}{2}.du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

Xét I” = $\int_{-1}^{0}$ $(x+1)^2.dx$

Đặt u = $(x+1)^2$ $\Rightarrow$ du = 2(x+1)dx $\Rightarrow$ dx = $\frac{1}{2\sqrt{u}}$.du

Đổi cận : với x = - 1 thì u = 0 ; x = 0 thì u = 1

Do đó I” = $\int_{0}^{1} \frac{u}{2\sqrt{u}}.du = \int_{0}^{1} \frac{\sqrt{u}}{2}.du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

Suy ra I = I’+I” = $\frac{2}{3}$

Chú ý :Lời giải của ví dụ trên không phải là lời giải tốt nhất.

<u>Ví dụ 3</u>: Tính I = $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2}$

<u>Lời giải có sai lầm</u>:

I = $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{2} x^2.dx = - x^{-1}\Big|_{-1}^{2} = -\frac{3}{2}$

<u>Sai lầm ở ví dụ trên là</u>: Hàm số y = $\frac{1}{x^2}$ gián đoạn tại x = 0 $\in [-1; 2]$ nên không được sử dụng công thức trên để tính.

<u>Lời giải đúng là</u>: Vì hàm số y = $\frac{1}{x^2}$ gián đoạn tại x = 0 $\in [-1; 2]$ nên tích phân này không tồn tại.

<u>Ví dụ 4</u>: Tính I = $\int_{0}^{\pi} \frac{dx}{1+\sin x}$

<u>Lời giải có sai lầm</u>:

Đặt t = $\tan\frac{x}{2}$ thì dx = $\frac{2dt}{1+t^2}$

Do đó $\int \frac{dx}{1+\sin x} = 2\int \frac{dt}{(1+t)^2} = 2\int (t+1)^{-2}d(t+1) = -\frac{2}{t+1} + c = -\frac{2}{\tan\frac{x}{2}+1} + c$

Vậy I = $-\frac{2}{\tan\frac{x}{2}+1}\Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{\tan\frac{\pi}{2}+1} + \frac{2}{\tan 0+1}$

Vì $\tan\frac{\pi}{2}$ không xác định nên tích phân trên không xác định.

Sai lầm ở ví dụ trên là: Khi biểu diễn sinx qua $\tan\frac{x}{2}$ không chú ý đến điều kiện của x để $\tan\frac{x}{2}$ xác định trên đoạn $[0;\pi]$ (đoạn đang tính tích phân)

Lời giải đúng là:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})} = \int_0^{\pi} \frac{d\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})}$$

$$=\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\pi} = 2$$

Ví dụ 5: Tính $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\sin x}\,.dx$

Lời giải có sai lầm:

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\sin x}\,.dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}\,.dx = 2\int_0^{2\pi} (\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}).d(\frac{x}{2})$$

$$= 2(-\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})\Big|_0^{2\pi} = 4$$

Sai lầm ở ví dụ trên là:

Khi biến đổi biểu thức $\sqrt{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2} = (\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})$

Phải nhớ rằng $\sqrt{a^2} = |a|$ do đó $\sqrt{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2} = |\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}|$

Lời giải đúng là:

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\sin x}\,.dx = I = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}\,.dx = \int_0^{2\pi} |\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}|.dx$$

$$=2.\sqrt{2}.\int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})|.d(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}) + 2.\sqrt{2}.\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} |\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})|.d(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})$$

$$=2.\sqrt{2}.\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}).d(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}) - 2.\sqrt{2}.\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}).d(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})$$

$$= -2.\sqrt{2}.\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\Big|_0^{\frac{3\pi}{2}} + 2.\sqrt{2}.\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = 4\sqrt{2}.$$

Tháng 4 năm 2012