A. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN.

1. Phương pháp đưa phương trình về dạng tích.

Cho phương trình: $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ $(a\neq 0)$ (1)

a) Phương pháp:

Cách 1: Nhóm các hạng tử, sau đó đặt thừa số chung để đưa vế trái về dạng tích.

Cách 2:

- Bước 1: Đoán nghiệm x_0 của phương trình dựa vào các kết quả sau:

+ Nếu a+b+c+d+e=0 thì (1) có nghiệm x = 1.

+ Nếu a-b+c-d+e=0 thì (1) có nghiệm x = -1.

+ Nếu a, b, c, d, e nguyên và (1) có nghiệm hữu tỉ $\frac{p}{q}$ thì p, q theo thứ tự là ước của e và a.

- Bước 2:

+ Bằng cách chia đa thức hoặc dùng lược đồ Hoócne, phân tích (1) thành:

$$(x-x_0)(ax^3+b_1x^2+c_1x+d_1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_0 \\ ax^3+b_1x^2+c_1x+d_1=0 \quad (1.1) \end{array}\right.$$

+ Giải phương trình (1.1) bằng cách:

- Đoán nghiệm x_1 của phương trình (1.1) dựa vào các kết quả sau:

+ Nếu $a+b_1+c_1+d_1=0$ thì (1.1) có nghiệm x = 1.

+ Nếu $a-b_1+c_1-d_1=0$ thì (1.1) có nghiệm x = -1.

+ Nếu a, b_1, c_1 ,d_1 nguyên và (1.1) có nghiệm hữu tỉ $\frac{p}{q}$ thì p, q theo thứ tự là ước của d_1 và a.

+ Nếu $ac_1^3=b_1^3d_1\ (a,b_1\neq 0)$ thì (1.1) có nghiệm x = $-\frac{c_1}{b_1}$.

- Phân tích (1.1) thành: $(x-x_1)(ax^2+b_2x+c_2)=0$ bằng cách chia đa thức hoặc dùng lược đồ Hoócne.

*** Lược đồ Hoócne :**

Nếu f(x) có nghiệm $x=x_0$ thì f(x) chứa nhân tử $(x-x_0)$, tức là : $f(x)=(x-x_0).g(x)$.

Trong đó : $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$

$g(x)= b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1x + b_0$

với : $\begin{cases} b_{n-1} = a_n \\ b_{n-2} = x_0b_{n-1} + a_{n-1} \\ ... \\ b_{i-1} = x_0b_i + a_i \\ ... \\ b_0 = x_0b_1 + a_1 \end{cases}$ Ta có bảng sau (***Lược đồ Hoócne*).**

x_i	a_n	a_{n-1}	...	a_i	...	a_0
		x_0b_{n-1}	...	x_0b_i	...	x_0b_0
$x = x_0$	$b_{n-1}=a_n$	b_{n-2}	...	b_{i-1}	...	0

b) Ví dụ:

Ví dụ 1: (Đề đại học Ngoại thương - 2000)

Giải phương trình: $(x^2+3x-4)^2+3(x^2+3x-4)=x+4$ (1.2)

Giải: Phương trình (1.2) $\Leftrightarrow (x-1)^2(x+4)^2+3(x-1)(x+4)-(x+4)=0$

$\Leftrightarrow (x+4)[(x-1)^2(x+4)+3(x-1)-1]=0$

$\Leftrightarrow (x+4)x(x^2+2x-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-4 \\ x=-1\pm\sqrt{5} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 4 nghiệm : x=0, x= -4, $x=-1\pm\sqrt{5}$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $x^4 -4x^3-x^2+16x-12 =0$ (1.3)

Giải: Ta có a+b+c+d+e=0 nên phương trình có 1 nghiệm x= 1.

Đưa phương trình về dạng: $(x-1)(x^3-3x^2-4x+12)=0$.

Phương trình $x^3-3x^2-4x+12=0$ có một nghiệm x = 2 nên

$(1.3) \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x^2-x-6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x-2=0 \\ x^2-x-6=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=-2 \\ x=3 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 4 nghiệm phân biệt x =1, x= 2, x= -2, x= 3.

* ***Nhận xét:*** *Phương pháp đưa phương trình về dạng tích là phương pháp thường được*

nghĩ đến đầu tiên khi giải phương trình. Nhưng nếu việc đưa về dạng tích gặp khó khăn, chúng ta nên nghĩ đến việc sử dụng các phương pháp khác.

2. Phương pháp đặt ẩn phụ.

2.1. Dạng 1 *(PT trùng phương):* $ax^4 + bx^2+c =0$ $(a\neq 0)$ (2)

a) Phương pháp:

- Đặt $t = x^2$ $(t \geq 0)$, đưa (2) về phương trình bậc hai: $at^2+bt+c=0$ (2')
- Giải (2'), nếu (2') có nghiệm $t_0 \geq 0$ thì (2) có nghiệm $x = \pm\sqrt{t_0}$

**** Chú ý:***

- (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ (2') vô nghiệm hoặc (2') có nghiệm $t_1 \leq t_2<0$
- (2) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ (2') có nghiệm $t_1 \leq 0 =t_2$
- (2) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2') có nghiệm $t_1 < 0 <t_2$ hoặc $t_1=t_2>0$
- (2) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2') có nghiệm $0=t_1 <t_2$
- (2) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2') có nghiệm $0< t_1 <t_2$

b) Ví dụ:

Ví dụ 1: Tìm m để phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

$$mx^4-2(m-1)x^2+m-1=0 \qquad (2.1)$$

Giải: Đặt $t = x^2$ $(t \geq 0)$. Phương trình trở thành:

$$mt^2 -2(m-1)t+m-1 =0 \qquad (2.2)$$

Phương trình (2.1) có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2.2) có 2 nghiệm phân biệt t_1, t_2 thoả mãn: $0=t_1<t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta'>0 \\ P=0 \\ S>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ 1-m>0 \\ \dfrac{m-1}{m}=0 \\ \dfrac{2(m-1)}{m}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m<1 \\ m=1 \end{cases} \text{(không có m thoả mãn)}$$

Vậy không tồn tại m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 2: Tìm m để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng: $x^4 - 2(m+1)x^2+2m+1 =0$ (2.3)

Giải: Đặt $t = x^2$ $(t \geq 0)$. Phương trình trở thành:

$$t^2 -2(m+1)t+2m+1 =0 \qquad (2.4)$$

(2.3) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2.4) có 2 nghiệm t_1, t_2 thoả mãn : $0< t_1 <t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+1)^2 - 2m - 1 > 0 \\ -\dfrac{b}{a} = 2(m+1) > 0 \\ \dfrac{c}{a} = 2m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m \neq 0$$

Khi đó 4 nghiệm của (2.3) là : $-\sqrt{t_2}$; $-\sqrt{t_1}$; $\sqrt{t_1}$; $\sqrt{t_2}$

Bốn nghiệm trên lập thành cấp số cộng

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{t_2} + \sqrt{t_1} = -2\sqrt{t_1} \\ -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} = 2\sqrt{t_1} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1 \ (*)$$

Theo định lý Viét ta có: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 2(m+1) \\ t_1 t_2 = 2m+1 \end{cases}$ (**)

Thay (*) vào (**) ta được:

$$\begin{cases} t_1 + 9t_1 = 2(m+1) \\ t_1.9t_1 = 2m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5t_1 = m+1 \\ 9t_1^2 = 2m+1 \end{cases} \Leftrightarrow 9m^2 - 32m - 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -\dfrac{4}{9} \end{array}\right.$$

Vậy với m = 4 hoặc m = - $\frac{4}{9}$ thì phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

2.2. Dạng 2: Phương trình có dạng : $(a_1x + a_2)(b_1x+b_2)(c_1x+c_2)(d_1x+d_2) = m$,

với $\begin{cases} a_1b_1 = c_1d_1 \\ a_1b_2 + a_2b_1 = c_1d_2 + c_2d_1 \end{cases}$ (3)

a) Phương pháp:

- Viết lại phương trình dưới dạng:

$[a_1b_1x^2+(a_1b_2+a_2b_1)x+a_2b_2].[c_1d_1x^2+(c_1d_2+c_2d_1)x+c_2d_2]=m$

- Đặt $t = a_1b_1x^2+(a_1b_2+a_2b_1)x+a_2b_2$, suy ra $c_1d_1x^2+(c_1d_2+c_2d_1)x+c_2d_2=t-a_2b_2+c_2d_2$.

Ta đưa (3) về phương trình bậc hai ẩn t: $t(t-a_2b_2+c_2d_2)=m$

* ***Đặc biệt:*** Khi $a_1=b_1=c_1=d_1=1$, phương trình có dạng :

$(x+a_2)(x+b_2)(x+c_2)(x+d_2) = m$ với $b_2 + a_2 = d_2 + c_2$

ta cũng có cách giải tương tự.

b) Ví dụ:

Ví dụ 1: Giải phương trình: (x-1)(x+1)(x+3)(x+5)= 9 (3.1)

Giải: Phương trình (3.1) $\Leftrightarrow$ (x-1)(x+5)(x+1)(x+3)= 9

$\Leftrightarrow (x^2 + 4x-5)(x^2+4x+3) = 9$

Đặt $t = x^2 + 4x-5$, phương trình (3.1) trở thành: t(t+8) = 9

$\Leftrightarrow t^2 + 8t - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=9 \end{array}\right.$

. Với t=1 thì $x^2 + 4x - 5 = 1 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x= -2\pm\sqrt{10}$

. Với t= 9 thì $x^2 + 4x - 5 = -9 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Vậy phương trình có 3 nghiệm : $x = -2+\sqrt{10}$; $x = -2-\sqrt{10}$; x = -2

Ví dụ 2: Giải phương trình: (2x-1)(x-1)(x-3)(2x+3)=-9 (3.2)

Giải: Phương trình (3.2) $\Leftrightarrow (2x^2-3x+1)(2x^2-3x-9)=-9$

Đặt $t = 2x^2-3x+1$, suy ra $2x^2-3x-9=t-10$, phương trình (3.2) trở thành:

$t(t-10)=-9 \Leftrightarrow t^2-10t+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=9 \end{array}\right.$

. Với t=1 thì $2x^2-3x+1=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{3}{2} \end{array}\right.$

. Với t = 9 thì $2x^2-3x+1=9 \Leftrightarrow 2x^2-3x-8=0 \Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{73}}{4}$

Vậy phương trình có 4 nghiệm phân biệt: x=0, $x=\frac{3}{2}$, $x=\frac{3\pm\sqrt{73}}{4}$

2.3. Dạng 3 : Phương trình có dạng:

$ax^4 + bx^3+cx^2+dx+e =0$ $(a\neq 0)$, với $\frac{e}{a}=\left(\frac{d}{b}\right)^2; e\neq 0$ (4)

a) Phương pháp:

- Nhận xét x=0 không phải là nghiệm của (4), chia hai vế cho $x^2 \neq 0$, ta được:

$$a(x^2+\frac{e}{a}.\frac{1}{x^2})+b(x+\frac{d}{b}.\frac{1}{x})+c=0$$

- Đặt t= $x+\frac{d}{bx}$, suy ra $x^2+\frac{e}{a}.\frac{1}{x^2}=t^2-2.\frac{d}{b}$, phương trình (4) trở thành:

$at^2+bt+c-2a\frac{d}{b}=0$. Đây là phương trình bậc hai quen thuộc.

* ***Đặc biệt:*** Khi a=e, phương trình có dạng: $ax^4+bx^3+cx^2\pm bx+a=0$ $(a\neq 0)$ ta cũng có cách giải tương tự.

b) Ví dụ:

Ví dụ 1: Giải phương trình: $2x^4-21x^3+74x^2-105x+50=0$ (4.1)

Giải: Nhận thấy x =0 không phải là nghiệm của (4.1), chia hai vế của (4.1) cho $x^2\neq 0$, ta được phương trình: $2(x^2+\frac{25}{x^2})-21(x+\frac{5}{x})+74=0$

Đặt t = $x+\frac{5}{x}$ ($|t|\geq 2\sqrt{5}$), suy ra $x^2+\frac{25}{x^2}=t^2-10$. Phương trình (4.1) trở thành:

$2t^2-21t+54=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=6\\ t=\frac{9}{2}\end{array}\right.$ (thỏa mãn đk)

. Với t = 6 thì $x+\frac{5}{x}=6\Leftrightarrow x^2-6x+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=5\end{array}\right.$

. Với t = $\frac{9}{2}$ thì $x+\frac{5}{x}=\frac{9}{2}\Leftrightarrow 2x^2-9x+10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=\frac{5}{2}\end{array}\right.$

Vậy phương trình có 4 nghiệm phân biệt là: x=1, x=2, x=5, x= $\frac{5}{2}$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $(x-2)^4+(x-2)(5x^2-14x+13)+1=0$ (4.2)

Giải: Đặt y=x-2. Phương trình trở thành: $y^4+5y^3+6y^2+5y+1=0$ (4.3)

Nhận thấy y=0 không là nghiệm của phương trình (4.3), chia 2 vế của (4.3) cho $y^2\neq 0$ ta được phương trình :

$$(y^2+\frac{1}{y^2})+5(y+\frac{1}{y})+6=0$$

Đặt t = $y+\frac{1}{y}$ ($|t|\geq 2$). Phương trình trở thành:

$t^2+5t+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}t=-1 & \text{(loại)}\\ t=-4 & \text{(t/m)}\end{array}\right.$

Với $t=-4$ thì $y+\frac{1}{y}=-4\Leftrightarrow y^2+4y+1=0\Leftrightarrow y=-2\pm\sqrt{3}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$

Vậy phương trình có 2 nghiệm : x= $\pm\sqrt{3}$

* ***Nhận xét:*** *Phương trình ban đầu không phải là phương trình dạng 3 nhưng với phép đặt ẩn phụ thích hợp, ta có thể đưa phương trình về dạng 3.*

2.4. Dang 4 : Phương trình có dạng : $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$ (5)

a) Phương pháp:

- Đưa (5) về dạng phương trình trùng phương bằng cách đặt $t = x + \frac{a+b}{2}$

b) Ví dụ: Giải phương trình : $(x + 1)^4 + (x + 3)^4 = 16$ (5.1)

Giải: Đặt t = x + 2, phương trình (5.1) trở thành:

$$(t-1)^4 + (t+1)^4 = 16 \Leftrightarrow 2t^4 + 12t^2 + 2 = 16$$

$\Leftrightarrow t^4 + 6t^2 - 7 = 0$ (Phương trình trùng phương)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2 = 1 \\ t^2 = -7 \ \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Với $t^2 = 1$ thì t = 1 hoặc t = -1. Từ đó suy ra x= -1 hoặc x= -3

Vậy phương trình có 2 nghiệm là : x = - 1; x = -3

2.5. Dang 5: Phương trình có dạng :

$$m(x + a)(x+b)(x+c)(x+d) = nx^2, \text{ với } ab = cd \neq 0, m \neq 0, n \neq 0 \qquad (6)$$

a) Phương pháp:

- Nhận thấy x=0 không là nghiệm của (6), chia hai vế cho $x^2 \neq 0$, ta được:

$$m(x + a+b + \frac{ab}{x})(x + c+d + \frac{cd}{x}) = n$$

- Đặt $t = x + a+b + \frac{ab}{x}$, ta đưa (6) về phương trình bậc hai ẩn t: mt(t-a-b+c+d)=n

b) Ví dụ: Giải phương trình: $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12) = 3x^2$ (6.1)

Giải: (6.1) $\Leftrightarrow 4(x+6)(x+10)(x+5)(x+12) = 3x^2$

$$\Leftrightarrow 4(x^2+16x+60)(x^2+17x+60) = 3x^2$$

Nhận thấy x=0 không là nghiệm của (6.1), chia hai vế cho $x^2 \neq 0$, ta được:

$$4(x + 16 + \frac{60}{x})(x + 17 + \frac{60}{x}) = 3 \qquad (6.2)$$

Đặt t = x + 16 + $\frac{60}{x}$, phương trình trở thành:

$$4t(t+1) = 3 \Leftrightarrow 4t^2 + 4t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2} \\ t = -\frac{3}{2} \end{array}\right.$$

. Với t= $\frac{1}{2}$ thì $2x^2 + 31x + 120 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -8 \\ x = -\frac{15}{2} \end{array}\right.$

. Với t=- $\frac{3}{2}$ thì $2x^2 + 35x + 120 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-35 \pm \sqrt{265}}{4}$

Vậy phương trình có 4 nghiệm phân biệt: x=-8, x=-$\frac{15}{2}$, $\frac{-35 \pm \sqrt{265}}{4}$.

2.6. Dang 6: Phương trình có dạng:

$$a.A(x) + b.B(x) + c.C(x) = 0 \text{ với } A(x).B(x) = C^2(x),\ B(x) \neq 0 \qquad (7)$$

a) Phương pháp:

- Chia hai vế cho $B(x) \neq 0$ rồi đặt t = $\frac{C(x)}{B(x)}$

- Phương trình (7) trở thành: $at^2+ct+b=0$.

b) Ví dụ: Giải phương trình : $-x^3+2x^2-4x+3-(x^2+x+1)^2=0$ (7.1)

Giải: Phương trình (7.1) $\Leftrightarrow 2(x-1)^2-(x^2+x+1)^2-(x^3-1)=0$

Chia hai vế của (7.1) cho $(x^2+x+1)^2 \neq 0$ ta được:

$$2.\left(\frac{x-1}{x^2+x+1}\right)^2 - 1 - \frac{x-1}{x^2+x+1} = 0$$

Đặt t = $\frac{x-1}{x^2+x+1}$, phương trình trở thành: $2t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

. Với t=1 thì $\frac{x-1}{x^2+x+1} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2 = 0$ (vô nghiệm)

. Với t = $-\frac{1}{2}$ thì $\frac{x-1}{x^2+x+1} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$

2.7. Dạng 7: Phương trình có dạng tổng quát: $ax^4 + bx^3+cx^2+dx+e =0$ ($a\neq 0$).

a) Phương pháp:

- Bước 1: Biến đổi phương trình về dạng $a(x^2+b_1x+c_1)^2+ B(x^2+b_1x+c_1) +C=0$

- Bước 2: Đặt $t= x^2+b_1x+c_1$, phương trình trở thành: $at^2+Bt+C=0$.

b) Ví dụ:

Giải phương trình: $x^4 -4x^3+3x^2+2x-20 =0$ (8.1)

Giải: Phương trình (8.1) $\Leftrightarrow x^4 -4x^3+4x^2-(x^2- 2x) -20 =0$

$\Leftrightarrow (x^2- 2x)^2-(x^2- 2x)-20=0$

Đặt $t = x^2- 2x$ ($t \geq -1$), phương trình trở thành:

$t^2 - t -20 =0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=-4 & \text{(loại)} \\ t=5 & \text{(t/m)} \end{array}\right.$

Với t =5 thì $x^2- 2x =5 \Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{6}$

Vậy phương trình có 2 nghiệm : $x=1\pm\sqrt{6}$.

3. Phương pháp đưa về hai luỹ thừa cùng bậc.

a) Phương pháp: Đưa phương trình về dạng: $[f(x)]^2 = [g(x)]^2 \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x)$

b) Ví dụ:

Ví dụ 1: Giải phương trình: $x^4 = 24x + 32$ (9.1)

Giải: Phương trình (9.1) $\Leftrightarrow x^4 + 4x^2 + 4 = 4x^2 + 24x + 36$

$\Leftrightarrow (x^2 + 2)^2 = (2x + 6)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2=2x+6 \\ x^2+2=-(2x+6) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x-4=0 \\ x^2+2x+8=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{5}$

Vậy phương trình có 2 nghiệm : $x = -1+\sqrt{5}$; $x = -1-\sqrt{5}$

Ví dụ 2: Giải phương trình: $x^4 + 4x -1=0$ (9.2)

Giải: Phương trình (9.2) $\Leftrightarrow x^4 +2x^2+1 = 2(x^2-2x+1)$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+1\right)^2=\left[\sqrt{2}\left(x-1\right)\right]^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+1=\sqrt{2}\left(x-1\right) \\ x^2+1=-\sqrt{2}\left(x-1\right) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-\sqrt{2}x+1+\sqrt{2}=0 \quad (VN) \\ x^2+\sqrt{2}x+1-\sqrt{2}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x=\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}$

4. Phương pháp dùng hệ số bất định:

a) Phương pháp: Xét phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (10)

- ***Bước1***: Giả sử (10) phân tích được thành $(x^2 + a_1x + b_1)(x^2 + a_2x + b_2)=0$

Khi đó ta có: $\begin{cases} a_1+a_2=a \\ a_1a_2+b_1+b_2=b \\ a_1b_2+a_2b_1=c \\ b_1b_2=d \end{cases}$

- ***Bước 2:*** Xuất phát từ $b_1b_2 = d$, tiến hành nhẩm tìm các hệ số b_1; b_2; a_1 ; a_2.

- ***Bước 3:*** Phương trình (10) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+a_1x+b_1=0 \\ x^2+a_2x+b_2=0 \end{array}\right.$

* ***Chú ý:*** *Phương pháp này thường áp dụng khi việc nhẩm tìm các hệ số a_1; b_1; a_2; b_2 là đơn giản.*

b) Ví dụ:

Ví dụ 1: Giải phương trình: $x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$ (10.1)

Giải: Giả sử (10.1) phân tích được thành : $(x^2 + a_1x + b_1)(x^2 + a_2x + b_2) = 0$

Khi đó: $\begin{cases} a_1+a_2=4 \\ a_1a_2+b_1+b_2=3 \\ a_1b_2+a_2b_1=2 \\ b_1b_2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1=-1 \\ b_2=1 \\ a_1=3 \\ a_2=1 \end{cases}$

Phương trình (10.1) $\Leftrightarrow (x^2 + 3x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3x-1=0 \\ x^2+x+1=0 \quad (VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2} \\ x=\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$

* ***Nhận xét:*** Từ $b_1b_2=-1$ ta thử ngay với $b_1=-1$, $b_2=1$, từ đây có thể dễ dàng tìm được $a_1=3$, $a_2=1$.

Ví dụ 2: Tìm a, b để phương trình $x^4 - 4x^3 + (4+a)x + b = 0$ (10.2)

có 2 nghiệm kép phân biệt.

Giải: Phương trình (10.2) có 2 nghiệm kép phân biệt x_1, x_2 nên:

$$x^4 - 4x^3 + (4+a)x + b = (x-x_1)^2(x-x_2)^2$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + (4+a)x + b = x^4 - 2(x_1+x_2)x^3 + (x_1^2+x_2^2+4x_1x_2)x^2 - 2x_1x_2(x_1+x_2)x + x_1^2x_2^2$$

Đồng nhất 2 vế, ta có:

$$\begin{cases} -4 = -2(x_1+x_2) \\ 0 = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 \\ 4 + a = -2x_1x_2(x_1+x_2) \\ b = x_1^2x_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \quad (1) \\ (x_1+x_2)^2 + 2x_1x_2 = 0 \quad (2) \\ 2x_1x_2(x_1+x_2) = -4 - a \quad (3) \\ x_1^2x_2^2 = b \quad (4) \end{cases}$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$

Thế vào (3), (4) ta được a=b=4.

Vậy với a= b =4 thì phương trình có 2 nghiệm kép phân biệt.

5. Phương pháp đánh giá:

a) Phương pháp: Sử dụng các hằng đẳng thức, các bất đẳng thức để đánh giá 2 vế của phương trình. Từ đó đưa ra kết luận về nghiệm của phương trình.

b) Ví dụ:

Ví dụ 1: Giải phương trình $x^4 + 8x^2 - 8x + 17 = 0$ (11.1)

Giải: Phương trình (11.1) $\Leftrightarrow x^4 - 8x^2 + 16 + 16x^2 - 8x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4)^2 + (4x - 1)^2 = 0$$

Vì $\begin{cases} (x^2-4)^2 \ge 0 \\ (4x-1)^2 \ge 0 \end{cases}$ nên (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ 4x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$

Vậy phương trình vô nghiệm.

Ví du 2: Giải phương trình: $(x-8)^4+(x-9)^4=1$ (11.2)

Giải: Dễ thấy x = 8 ; x = 9 đều là nghiệm của (11.2)

Xét các giá trị còn lại của x:

+) Với x < 8, ta có $9-x>1 \Rightarrow (9-x)^4>1,\ (x-8)^4>0$

Suy ra vế trái của (11.2) lớn hơn 1 nên (11.2) vô nghiệm.

+) Với x > 9, ta có $x-8>1 \Rightarrow (x-8)^4>1,\ (x-9)^4>0$

Suy ra vế trái của (11.2) lớn hơn 1 nên (11.2) vô nghiệm.

+) Với 8 < x < 9 thì: $0 < x - 8 < 1 \Rightarrow (x-8)^4 < x-8$

$0 < 9 - x < 1 \Rightarrow (x-9)^4 = (9-x)^4 < 9-x$

$\Rightarrow (x-8)^4+(x-9)^4 < x - 8 + 9 - x = 1$ nên (11.2) vô nghiệm.

Vậy phương trình có 2 nghiệm : x = 8, x = 9.

B. BÀI TẬP CỦNG CỐ.

Bài 1: Giải các phương trình sau:

1) $2x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x + 2 = 0$

2) $x^4 - 8x^3 + 7x^2 + 36x - 36 = 0$

3) $x^4 - 4x^2 + 12x - 9 = 0$

4) $x^4 + (x-1)(x^2+2x+2) = 0$

5) $(x^2-4)(x^2-2x) = 2$

6) $(4x+1)(12x-1)(3x+2)(x+1) = 4$

7) $2(x^2+x+1)^2 - 7(x-1)^2 = 13(x^3-1)$

8) $x^4 - 4x^3 + 8x = 5$ (Đề 38)

9) $x^4 + (x-1)^4 = 97$

10) $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 10x + 4 = 0$

Bài 2: Tìm m để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt: $(x^2-1)(x+3)(x+5) = m$.

Bài 3: Tìm k để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt: $x^4 - k^2x^2 + 2kx - 1 = 0$

Bài 4: Cho phương trình: $x^4 - 4mx^3 + (m+1)x^2 - 4mx + 1 = 0$

a) Giải phương trình với m = 1

b) Tìm m để phương trình có nghiệm.

Bài 5: Giải và biện luận phương trình: $2x^4 + mx^2 + 2 = 0$.