Bồi dưỡng học sinh giỏi khối 10 : Môn Toán.

VÀI Ý TƯỞNG TRONG VIỆC CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC.

Bất đẳng thức là một trong những bài toán hay gặp trong các kỳ thi học sinh giỏi cũng như thi đại học. Về phía học sinh thường gặp khó khăn trong khi giải nó. Trong khuôn khổ bài viết này với mong muốn cho học sinh thấy một vài cách suy nghĩ , giúp học sinh có cách nhìn , cách phân tích trước khi chứng minh một bất đẳng thức.

Chúng ta bắt đầu với bất đẳng thức khá quen thuộc.

* **Bài toán 1**: Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}\ (1)\quad\forall a,b,c>0$$

Nhận xét: Vế trái xem là tổng của ba phân số có tính chất chung : Ts + Ms = a + b + c. Do đó cộng vào mỗi phân số ở vế trái với **1** để xuất hiện nhân tử chung.

Bg: $(1)\Leftrightarrow(\frac{a}{b+c}+1)+(\frac{b}{a+c}+1)+(\frac{c}{a+b}+1)\geq\frac{9}{2}$

$$\Leftrightarrow 2(a+b+c)(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b})\geq 9$$

$$2(a+b+c)=a+b+b+c+a+c\geq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(a+c)}$$

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(a+c)}}$$

Đến đây dể dàng suy ra điều phải c/minh.

Dấu bằng xãy ra khi : a = b = c.

Bất đẳng thức này có nhiều cách chứng minh khác.

* **Bài toán mở rộng**:

1. Cho $\begin{cases}a_1,a_2,..,a_n>0\\a_1+a_2+..+a_n=S\end{cases}\quad\forall n\geq 2$

CMR: $\frac{a_1}{S-a_1}+\frac{a_2}{S-a_2}+..+\frac{a_n}{S-a_n}\geq\frac{n}{n-1}$

2. Cho $\begin{cases}a_1,a_2,..,a_n>0\\a_1+a_2+..+a_n=S\end{cases}\quad\forall n\geq 2$

CMR: $\frac{S-a_1}{a_1}+\frac{S-a_2}{a_2}+.+\frac{S-a_n}{a_n}\geq n^2-n$

* **Bài toán 2**: Chứng minh rằng : $\forall a,b,c>0$

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{a+b+c}{2}\quad(2)$$

Nhận xét a : Ta có thể xem : $\frac{a^2}{b+c}=a.\frac{a}{b+c}$

Nên đối với hạng tử này ta cộng thêm a để xuất hiện biểu thức : (a + b + c).

Do đó ở vế trái ta cộng thêm (a + b + c) để chuyển về bài toán 1.

Bg: Bất đẳng thức (2) tương đương với :

$$(\frac{a^2}{b+c}+a)+(\frac{b^2}{a+c}+b)+(\frac{c^2}{a+b}+c)\geq\frac{3(a+b+c)}{2}$$

$$\Leftrightarrow a(\frac{a}{b+c}+1)+b(\frac{b}{a+c}+1)+c(\frac{c}{a+b}+1)\geq\frac{3(a+b+c)}{2}$$

$$\Leftrightarrow(a+b+c)(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b})\geq\frac{3}{2}(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}\ \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Dấu bằng xảy ra khi a = b = c.

Nhận xét b : Vế trái của bất đẳng thức có chứa biến ở mẩu , vế phải thì không chứa biến ở mẫu. Nên ta đánh giá nhằm triệt tiêu mẫu ở vế trái.

Xét hạng tử: $\frac{a^2}{b+c}$ ta thấy lượng cộng thêm phải có dạng : $\frac{b+c}{\alpha}$

Chúng ta thấy ở (2) dấu bằng xãy ra khi: a = b = c.

Do đó ta tìm số α sao cho:

$\begin{cases}a=b=c\\\frac{a^2}{b+c}=\frac{b+c}{\alpha}\end{cases}$ khi đó ta tìm được : $\alpha = 4$.

Bg: Ta có: $\begin{cases}\frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}\geq a\\\frac{b^2}{a+c}+\frac{a+c}{4}\geq b\\\frac{c^2}{a+b}+\frac{a+b}{4}\geq c\end{cases}\Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra khi a = b = c.

* **Bài tập tương tự**:

(Đề thi HSGT K12 Tỉnh Quảng Bình năm 2006).

Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c\quad(3)$$

Bg: Áp dụng cách phân tích như trên ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{a^2}{b} + b \geq 2a \\ \dfrac{b^2}{c} + c \geq 2b \\ \dfrac{c^2}{a} + a \geq 2c \end{cases} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Dấu bằng xảy ra khi a = b = c.

* **Bài toán mở rộng** :

Cho $\begin{cases} a_1, a_2, .., a_n > 0 \\ a_1 + a_2 + .. + a_n = S \end{cases}$ $\forall n \geq 2$ CMR:

$$\frac{a_1^2}{S - a_1} + \frac{a_2^2}{S - a_2} + .. + \frac{a_n^2}{S - a_n^2} \geq \frac{S}{n-1}$$

* **Bài toán 3**:

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{a+c} + \frac{c^3}{a+b} \geq \frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \quad (5)$$

Bg: Áp dụng cách phân tích như trên ta có:

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{a^3}{b+c} + \dfrac{a(b+c)}{4} \geq a^2 \\ \dfrac{b^3}{a+c} + \dfrac{b(a+c)}{4} \geq b^2 \\ \dfrac{c^3}{a+b} + \dfrac{c(a+b)}{4} \geq c^2 \end{cases}$

Cộng vế theo vế ta có:

$$\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{a+c} + \frac{c^3}{a+b} + \frac{ab + bc + ac}{2}$$

$$\geq a^2 + b^2 + c^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{a+c} + \frac{c^3}{a+b}$$

$$\geq \frac{2(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ac)}{2}$$

Mà : $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$

Khi đó ta có:

$$\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{a+c} + \frac{c^3}{a+b} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

Mặt khác : $a^2 + b^2 + c^2 \geq \dfrac{(a+b+c)^2}{3}$

Nên : $\dfrac{a^3}{b+c} + \dfrac{b^3}{a+c} + \dfrac{c^3}{a+b} \geq \dfrac{1}{2}\dfrac{(a+b+c)^2}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{a+c} + \frac{c^3}{a+b} \geq \frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$$

Dấu bằng xảy ra khi a = b = c.

* **Bài tập tương tự**: Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq 3.\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \quad (4)\ \forall a, b, c > 0$$

\+ **Cách 1**: $\begin{cases} \dfrac{a^3}{b} + ab \geq 2a^2 \\ \dfrac{b^3}{c} + bc \geq 2b^2 \\ \dfrac{c^3}{a} + ca \geq 2c^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} + ab + bc + ca \geq 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

Mà : $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Mặt khác : $a^2 + b^2 + c^2 \geq \dfrac{(a+b+c)^2}{3}$

Suy ra điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi a = b = c.

\+ **Cách 2**: $\begin{cases} \dfrac{a^3}{b} + b^2 \geq a^2 + ab \\ \dfrac{b^3}{c} + c^2 \geq b^2 + bc \\ \dfrac{c^3}{a} + a^2 \geq c^2 + ac \end{cases}$

Việc chứng minh các bài toán trên cho phép ta nghỉ đến bài toán mở rộng sau:

* **Bài toán mở rộng 1**:

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\forall n \geq 1$

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{a+c} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1} \quad (6)$$

* **Bài toán mở rộng 2** :

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\forall n \geq 1$

$$\frac{a^n}{b} + \frac{b^n}{a} + \frac{c^n}{a} \geq 3.\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1} \quad (6)$$

* **Bài toán tổng quát**:

Cho các số dương thoả mãn:

$$a_1 + a_2 + .. + a_n = n \quad (n \in N^*)$$

Chứng minh rằng :

$$\frac{a_1^k}{a_2} + \frac{a_2^k}{a_3} + .. + \frac{a_n^k}{a_1} \geq a_1 + a_2 + .. + a_n \quad (k \in N^*)$$

Chúc các em thành công trên con đường học tập của mình.